

# 高焓可压缩流动热辐射颗粒两相流理论分析

李婷婷<sup>1,2</sup> 刘朋欣<sup>2</sup> 袁先旭<sup>2</sup> 周强<sup>1</sup> 李青<sup>2,†</sup>

1. 西安交通大学化学工程与技术学院, 西安 710049; 2. 空气动力学国家重点实验室, 中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000; † 通信作者, E-mail: 1201214314@pku.edu.cn

**摘要** 从理论上推导了弥散热辐射颗粒与可压缩流动的耦合方程, 发现弥散颗粒与携带流体的相间传热系数与马赫数平方成正比。极端高温下, 弥散颗粒相与携带流体相的对流传热是单向的, 即等温颗粒不断通过对流作用传热给流体, 但对流作用无法冷却高温热辐射颗粒。通过考察均匀流中缩核效应对惯性颗粒动力学的影响, 发现质量损失会诱导颗粒惯性参数发生变化, 从而改变颗粒的非定常速度曲线。

**关键词** 热辐射颗粒; 辐射热响应系数; 对流热响应系数; 颗粒缩核效应

## Theoretical Analysis on the High Enthalpy Radiation Particle Laden Compressible Flow

LI Tingting<sup>1,2</sup>, LIU Pengxin<sup>2</sup>, YUAN Xianxu<sup>2</sup>, ZHOU Qiang<sup>1</sup>, LI Qing<sup>2,†</sup>

1. School of Chemical Engineering and Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049; 2. State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000;  
† Corresponding author, E-mail: 1201214314@pku.edu.cn

**Abstract** The theoretical equations of particle laden compressible flow by taking into account of heat radiation and convection were derived. It is found that, the heat exchange between dispersed phase and carried fluid phase is proportional to square of Mach number. In extreme high temperature environment, the convective heat transfer between two phases is one way, which means that the isothermal particle transfers the heat into the fluid, but the fluid can not cool down the radiation-heated particle via convection. In addition, the effect of shrinking core on the particle dynamics was investigated. The shrinking core effect modifies the Stokes number of particle, therefore the time evolution of unsteady velocity of particle from rest to terminal state in a uniform flow was altered.

**Key words** radiation heated particle; thermal radiation response coefficient; thermal convection response coefficient; effect of shrinking core

近年来, 航空航天领域的快速发展使得工业界对航空设备的设计要求越来越高。航空航天设备中的流动往往是颗粒两相流<sup>[1-5]</sup>, 传统的单相可压缩流动的理论、计算和实验范式已不能满足当前紧迫的工业需求。此外, 航空航天中的颗粒两相流面临着极端高温环境, 颗粒热辐射效应不能忽略<sup>[6-9]</sup>。

两相流中的颗粒热辐射效应在航空发动机燃烧室和燃气轮机燃烧室等高温燃烧设备的热动力学过程中占据主导地位, 煤燃烧过程中的颗粒热辐射效应会显著影响颗粒两相流燃烧的热物理过程<sup>[10-12]</sup>。

20世纪80年代, Basu等<sup>[13]</sup>在考虑颗粒热辐射的前提下, 对气固流化床燃烧过程进行数值模拟, 结果与实验吻合。近年来, Zamansky等<sup>[14-15]</sup>对新型太阳能发电项目中的颗粒辐射效应进行系统的研究。新型太阳能发电的基本原理基于气固流化床颗粒热动力学和传热学原理: 流动工质近似于白体, 近似于黑体的颗粒吸收高温热源(太阳)热辐射, 弥散相颗粒与流体通过对流作用发生相间换热, 热流体驱动热机做功发电; 根据热力学第一和第二定律, 做功发电后的流体工质释放热量, 再次被泵运输到辐射

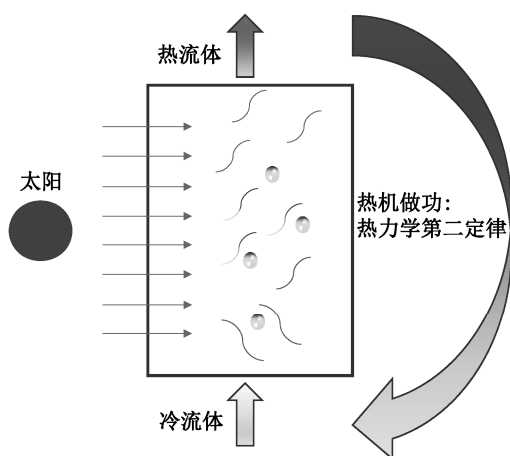


图 1 太阳能发电热辐射颗粒流化床示意图  
Fig. 1 Illustration of radiation-heated particle-laden fluidized bed in particle-received solar energy device

对流换热区域, 通过热辐射对流作用, 再次吸收太阳辐射热量, 周而复始的过程见图 1。

热辐射颗粒会调制湍流拟序结构<sup>[16]</sup>, 从而导致被热辐射效应调制的流体动力学间接地影响颗粒聚团过程, 而颗粒聚团的变化又会反过来调制湍流动力学<sup>[17]</sup>, 这是一个闭环耦合机制。鉴于此, 对于高焓颗粒两相流问题, 必须考虑颗粒热辐射效应。此外, 在极端高温条件下, 颗粒会发生物理化学反应(如燃烧、热解和汽化等)而损失质量, 使得颗粒半径随时间发展而减小, 即缩核效应。缩核效应显著地影响颗粒动力学过程<sup>[18-19]</sup>。

综上所述, 本研究在不考虑流体相化学反应非平衡效应、电离和激波间断等问题的情况下, 对考虑热辐射效应以及颗粒缩核效应的高焓可压缩颗粒两相流进行理论分析和基本方程推导, 以期开发高焓可压缩颗粒两相流直接数值模拟工具提供理论依据。

## 1 极端条件下热辐射颗粒的热响应系数

### 1.1 极端条件下热辐射颗粒的热力学过程

本文忽略辐射源的类型, 考察一个黑体颗粒在流场中受到热辐射和流体对流换热效应时的热动力学过程。如图 2 所示, 颗粒温度为  $T_p$ , 高温热辐射源温度为  $T_r$ , 环境流体温度为  $T_\infty$ , 假定辐射源温度比环境流体温度高 ( $T_r/T_\infty > 1$ )。假设流体是完全气体, 不考虑高温电离和激发态等情况, 近似地假设流体为白体, 无法吸收热辐射, 黑体颗粒吸收热辐射增温, 然后通过导热作用与颗粒周围流体发

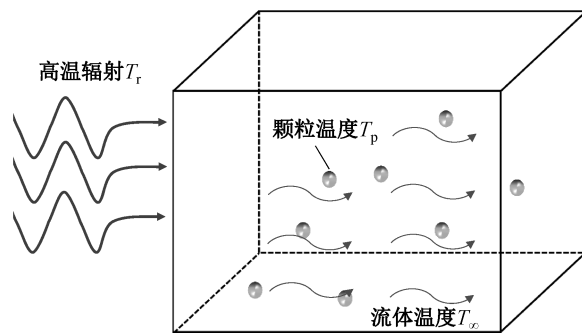


图 2 热辐射颗粒在流场中热力学过程示意图  
Fig. 2 Schematic of thermal dynamics of radiation heated particle in fluid flow

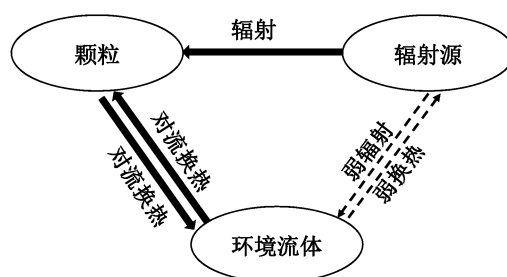


图 3 热辐射颗粒在流场中热量传输路径示意图  
Fig. 3 Schematic of thermal energy transfer pathway of radiation heated particle in fluid

生热交换, 颗粒的热力学过程可以用图 3 定性地表示, 主要包括与颗粒周围流体的对流换热和辐射吸热两个过程。

### 1.2 对流换热的热响应系数

单个圆球颗粒与颗粒周围流体的对流换热过程可用牛顿冷却公式<sup>[20-21]</sup>表征:

$$\dot{Q}_p = -4\pi \left(\frac{d_p}{2}\right)^2 h_f (T_p - T_\infty), \quad (1)$$

其中,  $\dot{Q}_p$  为颗粒热量变化率,  $d_p$  为颗粒直径,  $h_f$  为颗粒周围流体对流换热系数,  $T_p$  表示圆球颗粒的温度。如果忽略颗粒内部热导效应, 则圆球内部的温度场是各向同性均匀的。 $\dot{Q}_p$  还可以表示为

$$\dot{Q}_p = \frac{\partial m_p C_{p,p} T_p}{\partial t}, \quad (2)$$

其中,  $m_p$  表示颗粒质量,  $C_{p,p}$  表示颗粒比热容,  $t$  表示时间变量。颗粒 Nusselt 数  $Nu_p$  表征颗粒对流换热与导热换热效应的比值:

$$Nu_p = \frac{h_f d_p}{\lambda_\infty}, \quad (3)$$

其中,  $\lambda_\infty$  为流体导热系数。Nusselt数可以通过数值或物理实验测量获得经验表达式<sup>[22]</sup>。将式(2)和(3)代入式(1), 可得

$$\frac{\partial m_p C_{p,p} T_p}{\partial t} = -\pi d_p \lambda_\infty \text{Nu}_p (T_p - T_\infty)。 \quad (4)$$

在流场中任意 Euler 点, 对弥散相颗粒采样, 采样单元体积为  $V_{\text{cell}}$ , 采样单元内颗粒数为  $N_p$ , 则颗粒体积分率  $\phi_V$  为

$$\phi_V = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_{p,i}}{2} \right)^3}{V_{\text{cell}}}。 \quad (5)$$

不失一般性, 给定  $d_{p,i}$  为第  $i$  个颗粒的直径。为了方便推导的简洁, 采用单粒径假设, 即  $d_{p,i} = d_p$ , 则采样单元  $V_{\text{cell}}$  内  $N_p$  个颗粒的热量变化率为

$$\sum_{i=1}^{N_p} \left[ \frac{\partial m_p C_{p,p} T_{p,i}}{\partial t} = -\pi d_p \lambda_\infty \text{Nu}_{p,i} (T_{p,i} - T_\infty) \right] \times \frac{1}{V_{\text{cell}}}。 \quad (6)$$

将式(5)代入式(6), 可得

$$\phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial \rho_p C_{p,p} T_{p,i}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{N_p} \pi d_p \lambda_\infty \text{Nu}_p (T_{p,i} - T_\infty) \times \frac{1}{V_{\text{cell}}} \frac{\frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_p}{2} \right)^3}{\frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_p}{2} \right)^3}, \quad (7)$$

$$\phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial \rho_p C_{p,p} T_{p,i}}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{N_p} \pi d_p \lambda_\infty \text{Nu}_p (T_{p,i} - T_\infty) \times \phi_V \frac{1}{\frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_p}{2} \right)^3}。 \quad (8)$$

将式(8)无量纲化, 取无量纲化标准为

$$\rho_p^* = \frac{\rho_p}{\rho_\infty}, d_p^* = \frac{d_p}{L_\infty}, t^* = \frac{t}{L_\infty / U_\infty}, T_p^* = \frac{T_p}{T_\infty}, C_{p,p}^* = \frac{C_{p,p}}{\gamma R \text{Ma}^2}, \quad (9)$$

其中, 下角标  $i$  表示采样单元内的第  $i$  个颗粒, 上角标  $*$  表示无量纲物理量, 下角标  $\infty$  表示流场特征参考量。例如,  $L_\infty$  表示流场特征长度,  $U_\infty$  表示流场特征速度,  $\rho_\infty$  表示流场特征密度。  $T_p^*$  是无量纲颗粒温度,  $\rho_p^*$  是无量纲颗粒密度,  $C_{p,p}^*$  是无量纲颗粒比热容。  $\gamma$  为流体比热比,  $R$  为气体常数。将式(9)代入式(8), 可得任意采样单元内圆球颗粒群的对流换热无量纲化方程:

$$\phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial \rho_p^* C_{p,p}^* T_{p,i}^*}{\partial t^*} = -\phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr} (\gamma - 1) \text{Ma}^2} \frac{6 \text{Nu}_{p,i}}{d_p^{*2}} (T_{p,i}^* - T_\infty^*)。 \quad (10)$$

根据热对流定义, 采样单元内从颗粒群到流体的热流可以表示为  $q_{\text{pf}}^*$ :

$$q_{\text{pf}}^* = (-1) \cdot \phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial \rho_p^* C_{p,p}^* T_{p,i}^*}{\partial t^*} = \phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr} (\gamma - 1) \text{Ma}^2} \frac{6 \text{Nu}_{p,i}}{d_p^{*2}} (T_{p,i}^* - T_\infty^*), \quad (11)$$

其中,  $\text{Re}$  为流场马赫数,  $\text{Pr}$  为流场普朗特数,  $q_{\text{pf}}^*$  为采样单元内颗粒群通过对流作用传递给采样单元内流体的热量:

$$\text{Re} = \frac{\rho_\infty U_\infty L_\infty}{\mu_\infty}, \quad \text{Pr} = \frac{C_p \mu_\infty}{\lambda_\infty},$$

$$q_{\text{pf}}^* = \phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr} (\gamma - 1) \text{Ma}^2} \frac{6 \text{Nu}_{p,i}}{d_p^{*2}} (T_{p,i}^* - T_\infty^*), \quad (12)$$

其中,  $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$  为流体定压比热。

本文中令

$$\tau_{\text{th},C_{p,p}}^* = \frac{1}{\rho_p^* C_{p,p}^*}, \quad \tau_{\text{th},p,f,i}^* = \text{Re} \cdot \text{Pr} (\gamma - 1) \text{Ma}^2 \frac{d_p^{*2}}{6 \text{Nu}_{p,i}}, \quad (13)$$

然后将式(13)代入式(11), 可得

$$\frac{1}{\tau_{\text{th},C_{p,p}}^*} \frac{\partial T_{p,i}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\tau_{\text{th},p,f,i}^*} (T_{p,i}^* - T_\infty^*), \quad (14)$$

其中,  $\tau_{\text{th},C_{p,p}}^*$  是无量纲颗粒比热容特征时间,  $\tau_{\text{th},p,f,i}^*$  是第  $i$  个颗粒的无量纲对流换热特征时间。即任意采样单元内第  $i$  个圆球颗粒的对流换热无量纲化方程为

$$\frac{\partial T_{p,i}^*}{\partial t^*} = -\frac{\tau_{\text{th},C_{p,p}}^*}{\tau_{\text{th},p,f,i}^*} (T_{p,i}^* - T_\infty^*) = -\frac{1}{\text{St}_{\text{th},p,f,i}^*} (T_{p,i}^* - T_\infty^*), \quad (15)$$

其中,

$$\text{St}_{\text{th},p,f,i}^* = \frac{\tau_{\text{th},p,f,i}^*}{\tau_{\text{th},C_{p,p}}^*}, \quad (16)$$

$\text{St}_{\text{th},p,f,i}^*$  表征第  $i$  个颗粒在流体对流换热效应作用下的热响应平衡系数。

颗粒热容响应时间  $\tau_{\text{th},C_{p,p}}^*$  表达式表明, 颗粒密度

和比热容越大, 其比热容热平衡响应时间就越大, 意味着颗粒越难以被加热到热平衡温度。颗粒对流换热响应时间  $\tau_{th, pf, i}^*$  表达式表明, 第  $i$  个颗粒对流换热响应时间是流场特征量  $Re \cdot Pr(\gamma-1)$ 、颗粒粒径  $d_p^*/6$  和颗粒 Nusselt 数  $Nu_{pr} = f(Re_{p,i}, Ma_{p,i}, Pr)$  的函数, 即颗粒在高温流动中的对流导热响应时间耦合了流场和颗粒信息。

当  $St_{th, pf, i} \rightarrow 0$  时, 意味着对流换热的热响应时间  $\tau_{th, pf, i}^*$  比颗粒热容的热平衡响应时间  $\tau_{th, C_{p,p}}^*$  大得多, 颗粒温度  $T_{p,i}^*$  瞬间达到环境流体的温度  $T_\infty^*$ ; 当  $St_{th, pf} \gg 0$  时, 意味着  $\tau_{th, pf, i}^*$  比  $\tau_{th, C_{p,p}}^*$  小得多, 颗粒温度  $T_{p,i}^*$  达到参考流体的温度  $T_\infty^*$  是一个非定常过程。

### 1.3 辐射吸热的热响应系数

类似地, 根据热力学第一定律和 Stefan-Boltzmann 定律<sup>[23-24]</sup>, 在忽略对流和导热作用, 只考虑热辐射作用的情况下, 一个理想的黑体颗粒在真空中的热辐射平衡可表示为

$$\frac{\partial m_p C_{p,p} T_p}{\partial t} = -\pi d_p^2 \sigma_\infty (T_p^4 - T_r^4), \quad (17)$$

其中,  $\sigma_\infty$  为 Stefan-Boltzmann 常数,  $T_r$  表示辐射源温度。

采样单元  $V_{cell}$  内,  $N_p$  个颗粒的热量变化率为

$$\sum_{i=1}^{N_p} \left[ \frac{\partial m_p C_{p,p} T_{p,i}}{\partial t} = -\pi d_p^2 \sigma_\infty (T_{p,i}^4 - T_r^4) \right] \times \frac{1}{V_{cell}}, \quad (18)$$

将式(5)代入式(18), 可得任意采样单元内圆球颗粒群的辐射换热方程式:

$$\phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial \rho_p C_{p,p} T_{p,i}}{\partial t} = -\pi d_p^2 \sigma_\infty (T_{p,i}^4 - T_r^4) \times \frac{1}{V_{cell}} \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_p}{2} \right)^3, \quad (19)$$

$$\phi_V \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\partial \rho_p C_{p,p} T_{p,i}}{\partial t} = -\pi d_p^2 \sigma_\infty (T_{p,i}^4 - T_r^4) \times \phi_V \frac{1}{\frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_p}{2} \right)^3}. \quad (20)$$

将式(20)无量纲化, 按式(9)的标准, 此处  $T_r^* = \frac{T_r}{T_\infty}$ 。由此, 可以得到任意采样单元内第  $i$  个圆球颗粒的辐射换热的无量纲关系式:

$$\frac{\partial \rho_p^* C_{p,p}^* T_{p,i}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{Ma^3} \frac{\sigma_\infty T_\infty^4}{\rho_\infty a_\infty^3} \frac{6}{d_p^*} (T_{p,i}^{*4} - T_r^{*4}), \quad (21)$$

其中, 流场马赫数  $Ma = U_\infty / a_\infty$ 。在完全气体条件下,  $a_\infty = \sqrt{\gamma R T_\infty}$  为当地音速。

取  $\tau_{th, pr}^*$  为无量纲颗粒辐射换热特征时间:

$$\tau_{th, pr}^* = \frac{1}{Ma^3} \frac{\rho_\infty a_\infty^3 d_p^*}{\sigma_\infty T_\infty^4} \frac{6}{6}. \quad (22)$$

将式(22)代入式(21), 可得

$$\frac{\partial T_{p,i}^*}{\partial t^*} = -\frac{\tau_{th, C_{p,p}}^*}{\tau_{th, pr}^*} (T_{p,i}^{*4} - T_r^{*4}) = -\frac{1}{St_{th, pr}} (T_{p,i}^{*4} - T_r^{*4}), \quad (23)$$

其中,

$$St_{th, pr} = \frac{\tau_{th, pr}^*}{\tau_{th, C_{p,p}}^*}. \quad (24)$$

$St_{th, pr}$  表征颗粒在高温辐射效应下的热响应平衡系数。

颗粒辐射换热响应时间  $\tau_{th, pr}^*$  是马赫数  $Ma$ 、流体微团的参考音速动能  $\rho_\infty a_\infty^3$ 、参考热源功率  $\sigma_\infty T_\infty^4$  和颗粒粒径  $d_p^*/6$  的函数, 与颗粒对流导热响应时间相同, 颗粒辐射响应时间耦合了流场和颗粒信息。

当  $St_{th, pr} \rightarrow 0$  时, 意味着辐射热响应时间  $\tau_{th, pr}^*$  比颗粒热容热平衡响应时间  $\tau_{th, C_{p,p}}^*$  大得多, 颗粒温度  $T_p^*$  瞬间达到辐射热源的温度  $T_r^*$ ; 当  $St_{th, pr} \gg 0$  时, 意味着  $\tau_{th, pr}^*$  比  $\tau_{th, C_{p,p}}^*$  小得多, 颗粒温度  $T_p^*$  达到辐射热源的温度  $T_r^*$  是一个非定常过程。

### 1.4 颗粒热响应平衡系数之间的关系

含颗粒的高温流动中, 在综合考虑颗粒与流体之间的对流换热作用和热辐射作用的情况下, 任意采样单元内第  $i$  个圆球颗粒的无量纲热动力学方程可以表示为式(25), 即含颗粒的高温流动的热平衡方程:

$$\frac{\partial T_{p,i}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{St_{th, pf, i}} (T_{p,i}^* - T_\infty^*) - \frac{1}{St_{th, pr}} (T_{p,i}^{*4} - T_r^{*4}). \quad (25)$$

颗粒的辐射热响应平衡系数与对流换热响应平衡系数之间的比值为  $St_{th, pr} / St_{th, pf, i} = (\gamma R)^2 h_f / \sigma_\infty U_\infty^2 T_\infty^2 C_p (\gamma - 1)$ , 体现了颗粒辐射和对流换热响应的快慢。当  $St_{th, pr} / St_{th, pf} \sim 0$  时, 即热辐射的响应速度比热对流的响应速度快得多, 在流场中, 颗粒通过热辐射瞬间达到热平衡, 颗粒与流体对流换热作用损失的热量可以忽略, 如图 4(a)所示。这种情况下, 不论流场如何变化, 颗粒是等温的, 即颗粒温度  $T_p^*$  与

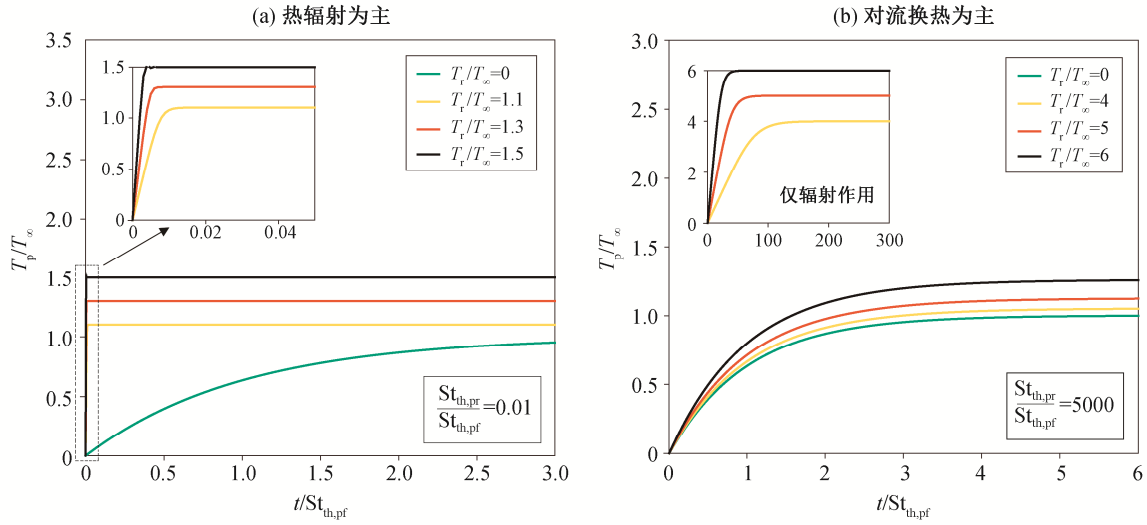


图 4 颗粒的辐射热响应系数与对流换热响应系数的比值对热能传递方式的影响

Fig. 4 Influence of the ratio of thermal radiation response coefficient to thermal convection response coefficient of particles on heat transfer modes

辐射源的温度  $T_r^*$  相等，高温颗粒不断通过对流作用单向传热给环境流体。当  $St_{th,pr}/St_{th,pf} \gg 1$  时，热对流的响应速度比热辐射的响应速度快得多，在流场中，颗粒通过热对流瞬间达到热平衡，颗粒通过热辐射吸收的热量不足以弥补对流换热带走的热量。在这种情况下，辐射源无法使颗粒温度显著升高，颗粒温度与周围流体温度相当，如图 4(b) 所示。

从工程的实际情况出发，飞行器表面在气动加热作用下发生烧蚀并产生烧蚀颗粒的典型空间高度为 20~30 km，来流马赫数为 8~20。典型参数范围见表 1。通过表 1 参数计算得到  $St_{th,pr}/St_{th,pf} \sim O(10^{-6})$ ，因此，飞行器烧蚀颗粒气固两相流的换热过程是微小烧蚀颗粒离开壁面后，瞬间被极端高温的辐射源加热到平衡温度，流体通过对流作用从颗粒带走的热量可以被辐射作用快速弥补，颗粒始终是恒温的。由上述分析可知，暂时无需考虑颗粒内部及颗粒与颗粒之间的热辐射。

## 2 高焔点力模型颗粒两相流方程

### 2.1 含颗粒的可压缩流动控制方程

本研究考虑的高温颗粒两相流运动方程是可压缩流体动力学方程与基于拉格朗日坐标的弥散颗粒

动力学方程的耦合(欧拉-拉格朗日方法)。假设颗粒为数学上无穷小的质点(点力模型)，不考虑颗粒有限体积带来的尾流效应对流场的作用，则

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \otimes \bar{u} + \bar{I} p) \\ & = \nabla \cdot (\mu \nabla \bar{u} + \mu (\nabla \bar{u})^T - \bar{I} \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \bar{u}) + \\ & (-1) \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \delta(\bar{X} - \bar{X}_{p,i}) \rho_c \bar{f}_{p,i}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{X}_{p,i}}{\partial t} = \bar{V}_{p,i}, \quad \frac{\partial \bar{V}_{p,i}}{\partial t} = \bar{f}_{p,i}, \quad (27)$$

其中， $\bar{f}_{p,i}$  为单位时间采样单元流体对颗粒  $i$  的作用力， $\bar{X}$  表示 Euler 位移坐标矢量， $\bar{V}_{p,i}$  表示 Lagrange 弥散相单个颗粒  $i$  的速度矢量， $\bar{X}_{p,i}$  表示 Lagrange 弥散相单个颗粒  $i$  的位移坐标矢量。根据文献[25-26]，在斯托克斯力占主导的情况下，

$$\bar{f}_{p,i} = \bar{f}_{p,i}^{Stokes} = \frac{1}{\tau_{p,i}} (\bar{u} - \bar{V}_{p,i}), \quad i = 1 \sim N_p, \quad \rho_c = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} m_{p,i}}{V_{cell}} \quad (28)$$

选取无量纲化标准为

表 1 飞行器常见流场参数范围

Table 1 General parameters in aerospace engineering

$\gamma$	$R/(J \cdot (\text{mol} \cdot \text{K})^{-1})$	$h_f/(W \cdot (\text{m}^2 \cdot \text{K})^{-1})$	$\sigma_\infty/(W \cdot (\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)^{-1})$	$U_\infty/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	$T_\infty/\text{K}$	$C_p/(J \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1})$
$\approx 1.3$	8.31451	$O(10)$	$5.67 \times 10^{-8}$	$O(1000)$	$O(1000)$	$\approx 1000$

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_\infty}, \bar{u}^* = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, t^* = \frac{t}{L_\infty/U_\infty}, p^* = \frac{p}{\rho_\infty U_\infty^2}, \\ \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_\infty}, x^* = \frac{x}{L_\infty}, \rho_c^* = \frac{\rho_c}{\rho_\infty}. \end{aligned} \quad (29)$$

将式(26)无量纲化, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho^* \bar{u}^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \bar{u}^* \otimes \bar{u}^* + \bar{I} p^*) \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \nabla^* \cdot (\mu^* \nabla^* \bar{u}^* + \mu^* \nabla^* \bar{u}^{*T} - \bar{I} \frac{2}{3} \mu^* \nabla^* \cdot \bar{u}^*) + \\ & (-1) \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \delta(\bar{X} - \bar{X}_{p,i}) \cdot \rho_c^* \frac{1}{\text{St}} f(\text{Re}_{p,i}, \text{Ma}_{p,i}) (\bar{u}^* - \bar{V}_{p,i}^*), \end{aligned} \quad (30)$$

其中, 斯托克斯数 St 为

$$\begin{aligned} \text{St} &= \frac{\tau_p}{\tau_f} = \frac{\rho_r d_p^2}{18\nu} / \frac{L_\infty}{U_\infty}, \tau_p = \frac{\rho_r d_p^2}{18\nu}, \tau_f = \frac{L_\infty}{U_\infty}, \rho_r = \frac{\rho_p}{\rho_f}, \\ \text{Re}_{p,i} &= \frac{\rho |V_{p,i} - u| d_p}{\mu}, \text{Ma}_{p,i} = \frac{|V_{p,i} - u|}{\sqrt{\gamma RT}}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中,  $\rho^*$  表征流体密度;  $\bar{u}^*$  表征流体微团速度矢量;  $\rho^*$  表征流体完全气体压力;  $\mu^*$  表征流体动力粘度,  $\nu$  为流体运动粘性系数;  $\delta$  表征从 Lagrange 颗粒反馈动量或能量到 Euler 点过程中, 为了保证数值稳定性而采用的光滑函数;  $\rho_c^*$  表征在 Lagrange-Euler 插值过程中, 弥散相颗粒群在任意 Euler 点, 即流体采样单元产生的等效密度;  $V_{\text{cell}}$  表示颗粒信息采集空间体积;  $\phi_i$  表示颗粒局部体积浓度;  $\rho_p$  是颗粒密度;  $\rho_f$  是流体密度; St 表征颗粒惯性;  $\tau_p$  表征颗粒弛豫时间;  $\tau_f$  表征流体特征时间;  $f(\text{Re}_{p,i}, \text{Ma}_{p,i})$  是在考虑可压缩效应情况下, 颗粒惯性和颗粒滑移马赫数对斯托克斯数 St 的修正系数<sup>[22]</sup>;  $\text{Re}_{p,i}$  为颗粒雷诺数,  $\text{Ma}_{p,i}$  为颗粒与流体之间的滑移马赫数。

高温颗粒两相流能量方程是可压缩流体能量方程耦合弥散相颗粒热动力学方程, 颗粒热力学方程主要包含颗粒与流体之间的对流换热效应和热辐射效应:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho C_V T}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{U^2}{2} + \nabla \cdot (\rho C_V T \bar{u}) + \nabla \cdot \left( \rho \frac{U^2}{2} \bar{u} \right) \\ &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot \left[ (\mu \nabla \bar{u} + \mu (\nabla \bar{u})^T - \bar{I} \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \bar{u}) \cdot \bar{u} - \bar{I} p \cdot \bar{u} \right] + \\ & (-1) \cdot \sum_{i=1}^{N_p} \delta(\bar{X} - \bar{X}_{p,i}) \rho_c^* \bar{f}_{p,i} \cdot (\bar{V}_{p,i} - \bar{u}) + q_{\text{pf}}, \end{aligned} \quad (32)$$

选取式(29)和  $C_V^* = C_V / (\gamma R \text{Ma}^2)$  为无量纲化标准, 将

式(32)无量纲化, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho^* T^*}{\partial t^*} + \gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} \frac{U^{*2}}{2} + \nabla^* \cdot (\rho^* T^* \bar{u}^*) + \\ & \gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 \nabla^* \cdot \left( \rho^* \frac{U^{*2}}{2} \bar{u}^* \right) + \gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 \nabla^* \cdot (\bar{I} \cdot \bar{u}^* p^*) \\ &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^* \cdot (k^* \nabla^* T^*) + \frac{\gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2}{\text{Re}} \phi^* + \\ & (-1) \cdot \gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 \sum_{i=1}^{N_p} \delta(\bar{X} - \bar{X}_{p,i}) \rho_c^* \bar{f}_{p,i} \cdot \\ & (\bar{V}_{p,i}^* - \bar{u}^*) + \gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 q_{\text{pf}}^*, \end{aligned} \quad (33)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{p,i}^* &= \frac{1}{\text{St}} (\bar{u}^* - \bar{V}_{p,i}^*), \\ \phi^* &= \nabla^* \cdot \left[ \left( \mu^* \nabla^* \bar{u}^* + \mu^* (\nabla^* \bar{u}^*)^T - \frac{2}{3} \bar{I} \mu^* \nabla^* \cdot \bar{u}^* \right) \cdot \bar{u}^* \right], \end{aligned} \quad (34)$$

$\phi^*$  表示单位体积流体微团张量粘性做功功率,  $\bar{f}_{p,i}^*$  表示单位体积流体受到的第  $i$  个颗粒的相间阻力,  $q_{\text{pf}}^*$  表示单位体积流体受热颗粒群通过对流作用传递给流体的热流密度。为了书写简洁, 热流反馈没有采用光滑函数  $\delta(\bar{X} - \bar{X}_{p,i})$ , 这是一种特例, 相当于光滑函数取平均。

式(30)和(33)给出热辐射惯性颗粒在高温可压缩流体中的动力学和热力学方程。弥散颗粒相对动量方程的调制与不可压的情况类似, 能量方程则不同, 马赫数对弥散颗粒相产生的能量扰动产生一个非线性放大效应: 惯性颗粒动量扰动对流体微团做功项  $\gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 \sum_{i=1}^{N_p} \delta(\bar{X} - \bar{X}_{p,i}) \rho_c^* \bar{f}_{p,i} \cdot (\bar{V}_{p,i}^* - \bar{u}^*)$ , 热辐射高温颗粒通过热对流作用对流体的单向热流运输  $\gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 \cdot q_{\text{pf}}^*$ 。尽管含辐射颗粒的高温可压缩流体热力学过程与太阳能发电工程相同, 但弥散相颗粒对能量运输的影响却不同。太阳能发电工程中的可压缩空气特征马赫数  $\text{Ma} \sim 0$ , 意味着能量方程受到的弥散相颗粒诱导是小量  $\gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 \sim 0$ , 而当前马赫数为  $\text{Ma} \sim O(1) - O(10)$ , 即能量方程从弥散颗粒相受到的调制不是小量  $\gamma(\gamma-1) \text{Ma}^2 \sim O(1) - O(100)$ 。

## 2.2 碳颗粒化学反应缩核模型

极端高温会使颗粒发生化学反应。以碳颗粒为例, 碳氧发生的化学反应会使颗粒损失质量, 从而导致颗粒大小随时间变化, 见图 5。

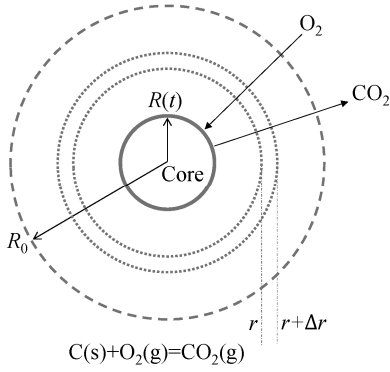


图5 碳颗粒与氧气完全反应燃烧的示意图

Fig. 5 Illustration of carbon particle reacts with oxygen

在极端高温条件下,碳颗粒表面的化学反应速率非常快。因此,控制反应速率的主要过程是氧气扩散到碳表面的过程。碳颗粒反应和燃烧的速率是非稳态的,本文假设极高温条件下准稳态过程中碳氧发生完全化学反应。图5中碳颗粒从初始半径 $R_0$ 缩减到任意 $t$ 时刻半径 $R(t)$ ,此过程中任意半径增量 $\Delta r$ 所包含的区间内氧气并未参与反应, $O_2$ 仅在到达半径为 $R(t)$ 的碳颗粒表面时与碳发生反应并被消耗。 $R_0$ 与 $R(t)$ 之间任意半径 $r$ 和 $r+\Delta r$ 所包含的空间内 $O_2$ 摩尔守恒,即“进 $O_2$ 速率-出 $O_2$ 速率+ $O_2$ 生成速率= $O_2$ 积累速率”<sup>[27-29]</sup>:

$$W_{Ar} \cdot 4\pi r^2|_{r+\Delta r} - W_{Ar} \cdot 4\pi r^2|_r + 0 = 0, \quad (35)$$

其中, $W_{Ar}$ 为组分 $A$ 的摩尔通量,单位为 $\text{mol}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ,组分 $A$ 表示二氧化碳或者氧气。式(35)两边除以 $4\pi \Delta r$ 并求极限,可得

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{W_{Ar} r^2|_{r+\Delta r} - W_{Ar} r^2|_r}{\Delta r} = \frac{d(W_{Ar} \cdot r^2)}{dr} = 0. \quad (36)$$

根据等摩尔逆流扩散原理(EMCD),每1 mol  $O_2$ 扩散到碳颗粒表面并被消耗,会生成1 mol  $CO_2$ ,并向相反方向扩散,数学表达式为

$$W_{CO_2} = -W_{O_2}. \quad (37)$$

任意半径 $r$ 处,组分 $A$ 的摩尔通量 $W_{Ar}$ 还可通过有效扩散率 $D_e$ (单位为 $\text{m}^2/\text{s}$ )和 $A$ 的摩尔浓度 $C_A$ (单位为 $\text{mol}/\text{m}^3$ )表示:

$$W_{Ar} = -D_e \frac{dC_A}{dr}. \quad (38)$$

将式(38)代入式(36),可得

$$\frac{d}{dr} \left( -D_e \frac{dC_A}{dr} r^2 \right) = 0. \quad (39)$$

假设有效扩散率 $D_e$ 为常数,式(38)两边约掉 $-D_e$ ,再进行两次积分,可得

$$r^2 \frac{dC_A}{dr} = K_1, C_A = -\frac{K_1}{r} + K_2, \quad (40)$$

其中, $K_1$ 和 $K_2$ 均为积分常数。边界条件:初始外层气/固界面上, $r=R_0$ , $C_A=C_{A0}$ ;  $t$ 时刻最新暴露出的气/固界面上, $r=R(t)$ , $C_A=0$ 。因此,

$$K_1 = \frac{C_{A0} R_0 R}{R - R_0}, K_2 = -\frac{C_{A0} R_0}{R - R_0}, \quad (41)$$

$$\frac{C_A}{C_{A0}} = \frac{1/R - 1/r}{1/R_0 - 1/R}. \quad (42)$$

将式(42)对任意半径 $r$ 求导,可得

$$\frac{dC_A}{dr} = \frac{C_{A0}}{r^2 (1/R - 1/R_0)}, \quad (43)$$

将式(43)代入式(38),得到组分 $A$ 的摩尔通量 $W_{Ar}$ :

$$W_{Ar} = \frac{-D_e C_{A0}}{(1/R - 1/R_0) r^2}. \quad (44)$$

由于1 mol C参加反应需要消耗1 mol  $O_2$ ,并生成1 mol  $CO_2$ ,因此,任意 $t$ 时刻,半径为 $R$ 的碳颗粒物质的量的损失率 $W_{CR}$ 等于 $r=R$ 处组分 $A$ 的摩尔通量 $W_{Ar}$ ,即

$$W_{CR} = W_{Ar}|_{r=R} = \frac{-D_e C_{A0}}{(1/R - 1/R_0) R^2} = \frac{-D_e C_{A0}}{R - R^2/R_0}. \quad (45)$$

碳颗粒的质量损失率为

$$\frac{dm_p}{dt} = \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p\right)}{dt} = W_{CR} 4\pi R^2 M_{\text{carbon}}, \quad (46)$$

其中, $\rho_p$ 为碳颗粒的等效密度, $M_{\text{carbon}}$ 为C元素的摩尔质量(单位为 $\text{kg}/\text{mol}$ )。

将式(45)代入式(46),得

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{M_{\text{carbon}}}{\rho_p} \cdot \frac{D_e C_{A0}}{R - R^2/R_0}. \quad (47)$$

选取如下标准:

$$R^* = \frac{R}{R_0}, t^* = \frac{t}{\tau_f}, \quad (48)$$

将式(48)代入式(47),并两边同乘以 $\tau_f/R_0$ ,进行无量纲化:

$$\frac{dR^*}{dt^*} = -\frac{M_{\text{carbon}} D_e C_{A0} \tau_f}{\rho_p R_0^2} \frac{1}{R^* - R^{*2}}. \quad (49)$$

令

$$\tau_{\text{chem}} = \frac{\rho_p R_0^2}{M_{\text{carbon}} D_e C_{A0}}, \quad \text{St}_{\text{chem}} = \frac{\tau_{\text{chem}}}{\tau_f}, \quad (50)$$

其中,  $\tau_{\text{chem}}$  为化学反应特征时间(单位为 s)。式(49)可转化为

$$\frac{dR^*}{dt^*} = -\frac{1}{\text{St}_{\text{chem}}} \frac{1}{R^* - R^{*2}}. \quad (51)$$

$\tau_{\text{chem}}$  表示碳颗粒化学反应的特征时间,  $\text{St}_{\text{chem}}$  是碳化学反应时间与流场特征时间的比值, 是表示碳颗粒化学反应的弛豫系数。式(51)给出极端高温下碳颗粒半径随化学反应进行变化的一般规律。

### 2.3 高温诱导的颗粒非定常惯性效应

如图 6 所示, 随着时间增加, 颗粒半径不断减小。由图 7 看出, 颗粒粒径变化的速度只与无量纲化的颗粒化学反应的弛豫系数  $\text{St}_{\text{chem}}$  相关。 $\text{St}_{\text{chem}} \rightarrow 0$  表明颗粒瞬间完成反应, 颗粒质量非定常损失过程相对于流场特征时间是瞬态;  $\text{St}_{\text{chem}} \rightarrow \infty$  表明颗粒反应非常缓慢, 颗粒质量非定常损失过程相对于流场特征时间是无穷长, 即颗粒粒径不变:

$$\text{St}_{\text{chem}} \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial R^*}{\partial t^*} \rightarrow 0, \quad R^* \approx \text{constant}. \quad (52)$$

单个颗粒受到的流体的无量纲相间的阻力为  $\frac{1}{\text{St}}(\bar{u}^* - \bar{V}_p^*)$ , 则单个颗粒受到的无量纲相间阻力为

$$\frac{\partial V_p^*}{\partial t^*} = \frac{1}{\text{St}}(\bar{u}^* - \bar{V}_p^*), \quad (53)$$

$$\text{St} = \frac{\rho_r [2R(t)]^2}{18\nu} \frac{1}{\tau_f} C_D(\text{Re}_p, \text{Ma}_p), \quad (54)$$

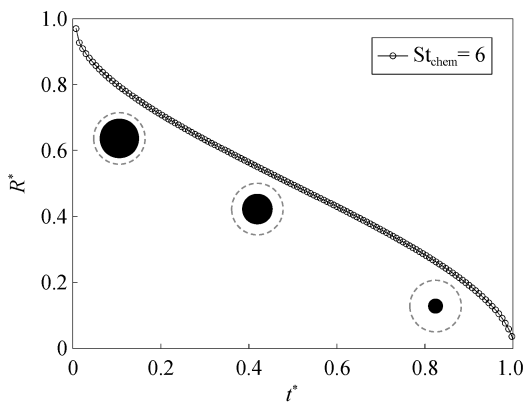


图 6 极端高温下颗粒粒径随时间变化的规律

Fig. 6 Unsteady variation of dimensionless particle radius in function of dimensionless time at extreme high temperature

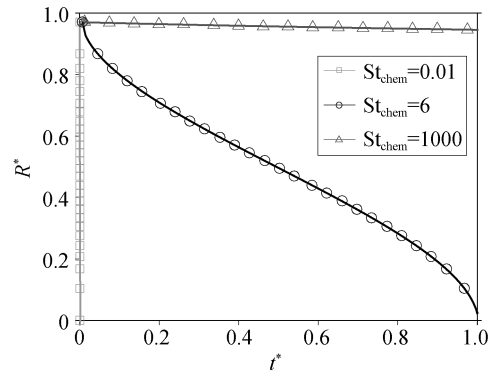


图 7 极端高温下不同缩核效应系数  $\text{St}_{\text{chem}}$  对颗粒粒径-时间变化规律的影响

Fig. 7 Effect of shrinking core coefficient  $\text{St}_{\text{chem}}$  on the time evolution of particle radius at extreme high temperature

$$\text{Re}_p = \frac{|\bar{V}_p - \bar{u}| 2R(t) \rho_f(T)}{\mu(T)}, \quad \text{Ma}_p = \frac{|\bar{V}_p - \bar{u}|}{a}, \quad (55)$$

其中,  $\text{Re}_p$  为颗粒滑移雷诺数,  $\text{Ma}_p$  为颗粒滑移马赫数,  $a$  为当地声速。

式(53)~(55)给出极高温条件下碳颗粒化学反应和流动耦合效应的一般动力学过程。不同的  $\text{St}_{\text{chem}}$  无量纲颗粒速度  $V_p^*$  随无量纲时间  $t^*$  的变化率如图 8 所示。可以看出, 弛豫系数  $\text{St}_{\text{chem}}$  越小, 颗粒对流体速度的响应越快。这是因为在颗粒损失质量的过程中, 颗粒惯性参数  $\text{St}$  也在不断减小, 颗粒惯性参数  $\text{St}$  越小, 颗粒对流体速度的跟随性越好。在  $\text{St}_{\text{chem}} \rightarrow 0$  极限情况下, 颗粒半径瞬间趋近零, 颗粒速度瞬间达

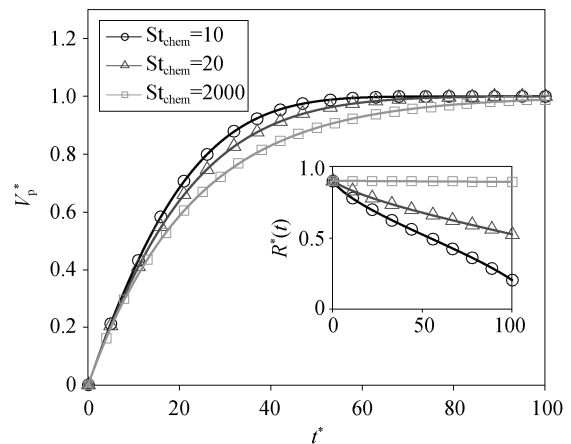


图 8 不同缩核效应系数  $\text{St}_{\text{chem}}$  对颗粒在均匀流中的非定常速度的影响

Fig. 8 Effect of shrinking core coefficient  $\text{St}_{\text{chem}}$  on the time evolution of unsteady velocity of particle from rest to terminal state in an uniform flow

到周围流体速度,即颗粒减小为示踪粒子<sup>[30-31]</sup>。

### 3 结论

本研究针对航空航天背景下的高温颗粒两相流问题,推导了基于点力颗粒模型的可压缩流体动力学、热动力学分别与热辐射颗粒动力学、热动力学耦合的无量纲方程。

研究结果表明,与对流导热换热类似,热辐射对颗粒热动力学的影响是颗粒属性和流体属性的耦合参数,可表示为热辐射响应系数。针对实际问题的物理量分析结果表明,热辐射响应系数比对流导热响应系数小几个量级,意味着颗粒通过热辐射作用瞬间达到高温热辐射源温度,对流导热换热效应可以忽略不计。可以近似地将颗粒视为等温,即极端高温条件下,热辐射颗粒与环境流体的换热过程是单向的,即等温颗粒不断被环境流体冷却,通过对流作用传递热量给环境流体。由于热辐射速度太快,等温颗粒完全无法通过对流导热的冷却作用被降温。在极端高温条件下,热辐射响应系数与温度的4次方成反比,与马赫数成反比,导致热辐射响应系数非常小。与此同时,热辐射颗粒通过对流换热传递给携带相流体的热量会被马赫数平方放大,这是低马赫数颗粒多相流燃烧流化床过程中没有的情况。

本文还考察了颗粒燃烧导致的变质量惯性颗粒效应,并推导了考虑变质量效应的颗粒动力学一般方程。颗粒燃烧会导致颗粒质量损失,颗粒粒径变小,会间接地影响颗粒动力学参数。颗粒动力学参数会影响颗粒动力学过程,加剧颗粒的非定常性,加快颗粒响应至定常速度的过程。

本研究还推导了无量纲化的可压缩热辐射颗粒两相流耦合方程,找到影响热辐射颗粒两相流的重要物理控制参数,为进行多物理条件下的可压缩点力模型颗粒两相流直接数值模拟奠定了理论基础。

### 参考文献

- [1] 岳朋涛. 超燃冲压发动机燃烧室若干问题的研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2002
- [2] 李东霞, 徐旭, 蔡国飙, 等. 火箭发动机气体-颗粒两相流双流体模型研究. 固体火箭技术, 2005, 28(4): 238-243
- [3] 李青, 陈坚强, 毕林, 等. 驻点流中的颗粒动力学. 空气动力学学报, 2021, 39(3): 192-200
- [4] 杨海林, 林建忠. 微纳颗粒两相流系统中湍流脉动效应研究综述. 空气动力学学报, 2021, 39(3): 109-120
- [5] 张利珍, 李运泽, 王浚. 气固两相流风洞内颗粒运动特性研究. 系统仿真学报, 2007, 19(14): 3200-3202
- [6] 罗万清, 李海燕, 梁剑寒. 基于 Euler-Lagrange 模型的电弧风洞喷管两相流模拟. 应用数学和力学, 2020, 41(1): 16-26
- [7] 高磊, 汪军. 燃气轮机燃烧室的现状及发展趋势. 能源研究与信息, 2017, 33(3): 159-166
- [8] 杨文婧, 匡亮, 褚开维, 等. 基于 CFD-DEM 算法的固体火箭发动机气-固两相流模拟. 推进技术, 2019, 40(7): 1546-1553
- [9] 王俊敏, 邴笑寒, 田琼, 等. 导弹垂直发射燃气排导系统两相流场数值分析. 海军航空工程学院学报, 2020, 35(4): 324-334
- [10] 刘国军, 孙丹萍, 周怀春. 基于分子运动对流换热和热辐射下煤粉颗粒群粒子的加热分析. 工程热物理学报, 2005, 26(4): 717-719
- [11] 梁栋, 贺振宗, 毛军逵, 等. 散射对高温气体-碳黑颗粒混合物辐射传输的影响. 南京航空航天大学学报, 2020, 52(4): 588-597
- [12] Mason P E, Darvell L I, Jones J M, et al. Single particle flame-combustion studies on solid biomass fuels. Fuel, 2015, 151: 21-30
- [13] Basu P, Halder P K. Combustion of single carbon particles in a fast fluidized bed of fine solids. Fuel, 1989, 68(8): 1056-1063
- [14] Zamansky R, Coletti F, Massot M, et al. Radiation-induced turbulence in particle-laden buoyant flows // APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts. San Diego, 2012: L31-003
- [15] Zamansky R, Coletti F, Massot M, et al. Turbulent thermal convection driven by heated inertial particles. Journal of Fluid Mechanics, 2016, 809: 390-437
- [16] 郑晓静, 王国华. 高雷诺数壁湍流的研究进展及挑战. 力学进展, 2020, 50(1): 202001
- [17] 王金, 库晓珂. 高温气流床反应器内生物质气化特性研究. 杭州: 第十届全国流体力学学术会议论文摘要集, 2018: 125-126
- [18] 陈涛, 库晓珂, 王金, 等. 生物质热化学转化的

- CFD 模拟研究. 力学与实践, 2021, 43(5): 663–673
- [19] Thiam E I, Masi E, Climent É, et al. Particle-resolved numerical simulations of the gas–solid heat transfer in arrays of random motionless particles. *Acta Mechanica*, 2019, 230(2): 541–567
- [20] Maruyama S, Moriya S. Newton’s law of cooling: follow up and exploration. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021, 164: 120544
- [21] Kleiber M. A new Newton’s law of cooling?. *Science*, 1972, 178: 1283–1285
- [22] 尚庆, 沈清, 庄逢甘. 超声速气流中简化微小液滴横向喷射的汽化过程探索. *空气动力学学报*, 2011, 29(1): 1–9
- [23] Montvay I, Pietarinen E. The Stefan-Boltzmann law at high temperature for the gluon gas. *Physics Letters B*, 1982, 110(2): 148–154
- [24] De Lima J A S, Santos J. Generalized Stefan-Boltzmann law. *International Journal of Theoretical Physics*, 1995, 34(1): 127–134
- [25] Tanaka T, Eaton J K. Classification of turbulence modification by dispersed spheres using a novel dimensionless number. *Physical Review Letters*, 2008, 101(11): 114502
- [26] Tanaka T, Eaton J K. Sub-Kolmogorov resolution partial image velocimetry measurements of particle-laden forced turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, 643: 177–206
- [27] Safari V, Arzpeyma G, Rashchi F, et al. A shrinking particle — hinking core model for leaching of a zinc ore containing silica. *International Journal of Mineral Processing*, 2009, 93(1): 79–83
- [28] Mohanna H, Commandre J M, Piriou B, et al. Detailed analysis of single biomass particle combustion by shadowgraphy // 9th European Combustion Meeting. Lisbonne, 2019: hal-02130614
- [29] Gbor P K, Jia C Q. Critical evaluation of coupling particle size distribution with the shrinking core model. *Chemical Engineering Science*, 2004, 59(10): 1979–1987
- [30] Reynolds A M. Superstatistical mechanics of tracer-particle motions in turbulence. *Physical Review Letters*, 2003, 91(8): 084503
- [31] Chang T P K, Watson A T, Tatterson G B. Image processing of tracer particle motions as applied to mixing and turbulent flow — I. The technique. *Chemical Engineering Science*, 1985, 40(2): 269–275