北京大学学报(自然科学版) 第 54 卷 第 4 期 2018 年 7 月
Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 54, No. 4 (July 2018)
doi: 10.13209/j.0479-8023.2017.184

赋值 Banach 代数的锥度量空间中 c-距离下的不动点定理

黄华平 邓冠铁†

北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875; † 通信作者, E-mail: denggt@bnu.edu.cn

摘要 在不考虑映射的连续性和锥的正规性条件下, 得到赋值 Banach代数的锥度量空间中 c-距离意义下压缩型映射不动点的存在性和唯一性定理, 在很大程度上改进和补充了前人的结果, 并举例验证了得到的结论。另外, 通过解决一个初等方程解的存在性和唯一性问题, 说明了所得结果的一个重要应用。

关键词 赋值Banach代数的锥度量空间; c-距离; 连续性; 正规性; 不动点

中图分类号 O177

Fixed Point Theorems under c-Distance in Cone Metric Spaces over Banach Algebras

HUANG Huaping, DENG Guantie†

Laboratory of Mathematics and Complex Systems (MOE), School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875; † Corresponding author, E-mail: denggt@bnu.edu.cn

Abstract The authors obtain several theorems of the existence and uniqueness of fixed point for contractive mappings under c-distance in cone metric spaces over Banach algebras without the assumptions of normality of cones and the continuity of mappings. The results greatly improve and complement some previous results. Moreover, a supportive example to illustrate the main assertions is also given. Otherwise, by solving the problem of existence and uniqueness for an elementary equation, a significant application for the obtained results is presented.

Key words cone metric space over Banach algebra; c-distance; continuity; normality; fixed point

度量空间在理论与应用上都有很大的价值。例如, 建立在度量空间上的不动点理论就是应用的典范。然而, 随着科技的进步, 仅有度量空间的理论, 已经远远不能满足人们应用数学去解决生产技术中疑难问题的需求。于是有研究者试图将度量空间进行各种推广, 例如拟度量空间[1]、b-度量空间[2] (或称度量型空间[3])、有序度量空间[4]、复值度量空间[5]、G-度量空间[6]、偏度量空间[7]以及锥度量空间[8]等, 其中最有名的空间之一是Huang等[8]2007年提出的锥度量空间, 它是向量版本的度量空间, 一个显著特点是距离函数, 即锥距离的值域并非通常的实数域, 而是Banach空间。Cho等[9]在锥度量空间中嵌套一个距离函数, 即c-距离, 大大地推广了锥距离, 使其具有较大的应用价值。随后, 学者们得到大量与c-距离有关的不动点定理[10–11]。Liu等[12]把锥距离的值域Banach空间扩展到 Banach代数上, 并引进赋值Banach代数的锥度量空间, 也得到该空间上的一些不动点定理。Huang等[13]介绍了赋值Banach代数的锥度量空间上的c-距离, 并得到与c-距离有关的几个不动点定理。

本文也得到赋值Banach代数的锥度量空间中c-距离下的不动点定理。与前人结果不同的是, 本

国家自然科学基金(11271045)资助

收稿日期: 2017–04–05; 修回日期: 2017–09–12; 网络出版日期: 2018–03–02

文的结果有多方面的改进。第一，前人的结果通常离不开两个重要条件：一是映射的连续性，二是锥的正规性。由于这些条件的限制，使所得结果的应用很不方便。本文的主要结果是去掉了这两个条件，使得定理的应用变的容易。第二，本文删除了前人结果中范数所满足的条件，使得定理条件大大简化。第三，本文不仅得到c-距离下不动点的存在性，还得到不动点的唯一性。前人的研究大多只得到c-距离下不动点的存在性，关于其不动点的唯一性几乎没有涉及。另外，我们通过一个例子，验证了所得到的结果，并给出所得结果在方程解的存在性和唯一性方面的一个应用。

1 定义和引理

定义 1[12] 设$\mathcal{A}$为Banach代数，θ和e分别为$\mathcal{A}$的零元和单位元，P为$\mathcal{A}$的一个非空闭子集，$\mathbb{R}^+$为非负实数集。若满足

1) $\{\theta,e\}\subset P$,

2) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+\Rightarrow\alpha P+\beta P\subset P$,

3) $P^2=PP\subset P$,

4) $P\bigcap(-P)=\{\theta\}$,

则称P为$\mathcal{A}$中的一个锥，称满足条件$\operatorname{int}P\neq\varnothing$的锥为体锥。$\operatorname{int}P$表示$P$的全体内点所组成的集合。设$x,y\in\mathcal{A}$，规定$x\preccurlyeq y\Leftrightarrow y-x\in P$，$x\ll y\Leftrightarrow y-x\in\operatorname{int}P$，此处$\preccurlyeq$和$\ll$都称为$\mathcal{A}$中的偏序。若存在常数$K>0$，使得

$$\theta\preccurlyeq x\preccurlyeq y\Rightarrow\|x\|\leqslant K\|y\|,$$

则称P为$\mathcal{A}$中的正规锥，称满足上式最小的K为P的正规常数。

下文如无特殊说明，记$\mathbb{N}$为自然数集，$\mathcal{A}$为Banach 代数，P为$\mathcal{A}$中的体锥，θ,e分别为$\mathcal{A}$的零元和单位元，$\rho(k)$为$k\in\mathcal{A}$的谱半径，$\preccurlyeq$和$\ll$都为$\mathcal{A}$中的偏序。

定义 2[12] 设X为非空集，若映射$d:X\times X\to\mathcal{A}$满足

1) $\theta\preccurlyeq d(x,y)\,(\forall x,y\in X)$, $d(x,y)=\theta\Leftrightarrow x=y$,

2) $d(x,y)=d(y,x)\,(\forall x,y\in X)$,

3) $d(x,y)\preccurlyeq d(x,z)+d(z,y)\ (\forall x,y,z\in X)$,

则称d为X上的锥度量，称(X,d)为赋值 Banach 代数的锥度量空间。

注 1[8] 在定义2 中，若取$\mathcal{A}$=E (E为 Banach 空间)，则称(X,d)为锥度量空间。

定义 3[8] 设(X,d)为赋值 Banach 代数$\mathcal{A}$的锥度量空间，$\{x_n\}\subset X$, $x\in X$。

1) 若$\forall c\gg\theta$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得当$n>N$时，都有$d(x_n,x)\ll c$，则称$\{x_n\}$收敛到x，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，或$x_n\to x\,(n\to\infty)$，此时称$x$为$\{x_n\}$的极限。

2) 若$\forall c\gg\theta$，存在$N\in\mathbb{N}$，使得当$n>N$时，都有$d(x_n,x_m)\ll c$，则称$\{x_n\}$为X中的 Cauchy 列。

3) 若X中的每个 Cauchy 列都在X中收敛，则称(X,d)是完备的。

定义 4[13] 设(X,d)为赋值 Banach 代数$\mathcal{A}$的锥度量空间，$\{y_n\}$为X中的点列，$q:X\times X\to\mathcal{A}$为映射，若满足下列条件：

1) $\theta\preccurlyeq q(x,y)\,(\forall x,y\in X)$,

2) $q(x,y)\preccurlyeq q(x,z)+q(z,y)\ (\forall x,y,z\in X)$,

3) 若$\forall x\in X$，都存在$u=u_x\in P$，使得$q(x,y_n)\preccurlyeq u$，且$y_n\to y\in X\ (n\to\infty)$，则$q(x,y)\preccurlyeq u$,

4) 若$\forall c\gg\theta$，都存在$u\gg\theta$，使得$q(z,x)\ll u$和$q(z,y)\ll u$，则$d(x,y)\ll c$,

则称q为X上的c-距离。

注2[9] 一般地，$q(x,y)\neq q(y,x)\,(x,y\in X)$，$q(x,x)\neq\theta\,(x\in X)$。

例 1[13] 设$\mathcal{A}=C[0,1]$，其范数定义为$\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$，则$P=\{x\in\mathcal{A}:x(t)\geqslant 0,\ t\in[0,1]\}$为正规锥。令$X=[0,+\infty)$，$d:X\times X\to\mathcal{A}$为$d(x,y)=e^t|x-y|$，则$(X,d)$为赋值 Banach 代数$\mathcal{A}$的锥度量空间。令$q:X\times X\to\mathcal{A}$为$q(x,y)=e^t(x+y)$，则$q$为$c$-距离。

引理 1[9] 设(X,d)为赋值 Banach 代数$\mathcal{A}$的锥度量空间，q为X上的c-距离，$\{x_n\}\subset X$。若存在$\{u_n\}\subset\mathcal{A}$，使得当$m>n$时，有$q(x_n,x_m)\preccurlyeq u_n\to\theta\,(n\to\infty)$，则$\{x_n\}$是 Cauchy 列。

引理 2[9] 设(X,d)为赋值 Banach 代数$\mathcal{A}$的锥度量空间，q为X上的c-距离，$\{x_n\}\subset X$，$y,z\in X$。若存在$u_n,v_n\in\mathcal{A}$，使得$q(x_n,y)\preccurlyeq u_n\to\theta\,(n\to\infty)$，$q(x_n,z)\preccurlyeq v_n\to\theta\ (n\to\infty)$，则$y=z$。

引理 3[14] 设$\mathcal{A}$为带有单位元e的 Banach 代数，则$\rho(k)=\lim\limits_{n\to\infty}\|k^n\|^{\frac{1}{n}}$为$k\in\mathcal{A}$的谱半径。如果$\rho(k)<1$，那么$e-k$可逆，并且$(e-k)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}k^n$，还有

$$\rho\left((e-k)^{-1}\right)\leqslant\frac{1}{1-\rho(k)}。$$

引理 4 设P为锥，$k\in P$，且$\rho(k)<1$，则k^n

$\to \theta\ (n\to\infty)$ 。

证明　由引理3，有 $\rho(k)=\lim\limits_{n\to\infty}\|k^n\|^{\frac{1}{n}}<1$，于是存在 $\alpha>0$，适合 $\lim\limits_{n\to\infty}\|k^n\|^{\frac{1}{n}}<\alpha<1$ 。取 n 足够大，使得 $\|k^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\alpha$，故 $\|k^n\|\leqslant\alpha^n\to 0\ (n\to\infty)$，从而 $k^n\to\theta\ (n\to\infty)$ 。

引理 5[14]　设 $\mathcal{A}$ 为带有单位元 e 的 Banach 代数，$u,v\in\mathcal{A}$ 且 u,v 可交换，则

$$\rho(uv)\leqslant\rho(u)\rho(v)\text{ 。}$$

2　主要结果

定理 1　设 (X,d) 为完备的赋值 Banach 代数 $\mathcal{A}$ 的锥度量空间，P 为 $\mathcal{A}$ 中的锥，q 为 X 上的 c-距离，$T:X\to X$ 为映射。若满足

$$q(Tx,Ty)\preccurlyeq k_1q(x,y)+k_2q(x,Tx)+k_3q(x,Ty)\quad(\forall x,y\in X),\tag{1}$$

其中 $k_i\in P\ (i=1,2,3)$，使得 k_3 与 k_1+k_2 可交换，且 $\rho(k_3)+\rho(k_1+k_2+k_3)<1$，则 T 在 X 中有唯一的不动点 x^*，且任意的迭代点列 $\{T^nx\}\ (x\in X)$ 都收敛到 x^*，并且还有 $q(x^*,x^*)=\theta$ 。

证明　分三步证明。

第 1 步：先证明不动点的存在性。

$\forall x_0\in X$，做 Picard 迭代序列 $x_{n+1}=Tx_n$ 。若存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得 $x_{n_0+1}=x_{n_0}$，则 $Tx_{n_0}=x_{n_0+1}=x_{n_0}$，从而 x_{n_0} 是 T 的一个不动点，结论成立。

下面假设 $x_{n+1}\neq x_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$ 。由式(1)有

$$\begin{aligned}q(x_{n+1},x_{n+2})&=q(Tx_n,Tx_{n+1})\\&\preccurlyeq k_1q(x_n,x_{n+1})+k_2q(x_n,Tx_n)+k_3q(x_n,Tx_{n+1})\\&=k_1q(x_n,x_{n+1})+k_2q(x_n,x_{n+1})+k_3q(x_n,x_{n+2})\\&\preccurlyeq(k_1+k_2+k_3)q(x_n,x_{n+1})+k_3q(x_{n+1},x_{n+2}),\end{aligned}$$

从而

$$(e-k_3)q(x_{n+1},x_{n+2})\preccurlyeq(k_1+k_2+k_3)q(x_n,x_{n+1})\text{ 。}\tag{2}$$

由 $\rho(k_3)+\rho(k_1+k_2+k_3)<1$ 得到 $\rho(k_3)<1$ 。遂由引理3得到 $e-k_3$ 可逆，再由式(2)得到

$$q(x_{n+1},x_{n+2})\preccurlyeq(e-k_3)^{-1}(k_1+k_2+k_3)q(x_n,x_{n+1})\text{ 。}\tag{3}$$

令 $h=(e-k_3)^{-1}(k_1+k_2+k_3)$，则由式(3)可得

$$\begin{aligned}q(x_n,x_{n+1})&\preccurlyeq hq(x_{n-1},x_n)\preccurlyeq h^2q(x_{n-2},x_{n-1})\\&\preccurlyeq\cdots\preccurlyeq h^nq(x_0,x_1)\text{ 。}\end{aligned}\tag{4}$$

由于 k_3 与 k_1+k_2 可交换，即 $k_3(k_1+k_2)=(k_1+k_2)k_3$，则由引理3有

$$\begin{aligned}(e-k_3)^{-1}(k_1+k_2+k_3)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}k_3^n\right)(k_1+k_2+k_3)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}k_3^n(k_1+k_2)+\sum_{n=0}^{\infty}k_3^{n+1}=(k_1+k_2)\sum_{n=0}^{\infty}k_3^n+k_3\sum_{n=0}^{\infty}k_3^n\\&=(k_1+k_2+k_3)\sum_{n=0}^{\infty}k_3^n=(k_1+k_2+k_3)(e-k_3)^{-1},\end{aligned}$$

从而 $(e-k_3)^{-1}$ 与 $k_1+k_2+k_3$ 可交换。再由引理3和引理 5 可得

$$\begin{aligned}\rho(h)&=\rho\left((e-k_3)^{-1}(k_1+k_2+k_3)\right)\\&\leqslant\rho\left((e-k_3)^{-1}\right)\rho(k_1+k_2+k_3)\\&\leqslant\frac{\rho(k_1+k_2+k_3)}{1-\rho(k_3)}\\&<1\text{ 。}\end{aligned}\tag{5}$$

$\forall m>n$，由式(4)和(5)以及引理3有

$$\begin{aligned}q(x_n,x_m)&\preccurlyeq q(x_n,x_{n+1})+q(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+q(x_{m-1},x_m)\\&\preccurlyeq h^nq(x_0,x_1)+h^{n+1}q(x_0,x_1)+\cdots+h^{m-1}q(x_0,x_1)\\&=h^n(e+h+\cdots+h^{m-n-1})q(x_0,x_1)\\&\preccurlyeq h^n(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\text{ 。}\end{aligned}\tag{6}$$

再由式(5)和引理4可得 $h^n\to\theta\ (n\to\infty)$，从而 $\|h^n\|\to 0\ (n\to\infty)$，所以

$$\begin{aligned}\|h^n(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\|&\leqslant\|h^n\|\|(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\|\\&\to 0\ (n\to\infty)\text{ 。}\end{aligned}\tag{7}$$

于是，由式(6)和(7)可得

$$q(x_n,x_m)\preccurlyeq h^n(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\to\theta\ (n\to\infty)\text{ 。}\tag{8}$$

因此，由引理 1 得到 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。由于 (X,d) 是完备的，故存在 $x^*\in X$，使得 $x_n\to x^*\ (n\to\infty)$ 。现在式(8)中让 $m\to\infty$，由定义4的条件3，得到

$$q(x_n,x^*)\preccurlyeq h^n(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\to\theta\ (n\to\infty)\text{ 。}\tag{9}$$

由式(1)可得

$$
\begin{aligned}
& q(x_n,Tx^*) \\
& = q(Tx_{n-1},Tx^*) \\
& \preccurlyeq k_1q(x_{n-1},x^*)+k_2q(x_{n-1},Tx_{n-1})+k_3q(x_{n-1},Tx^*) \\
& \preccurlyeq k_1q(x_{n-1},x^*)+k_2q(x_{n-1},x_n)+k_3q(x_{n-1},x_n)+k_3q(x_n,Tx^*),
\end{aligned}
$$

导出

$$
(e-k_3)q(x_n,Tx^*)\preccurlyeq k_1q(x_{n-1},x^*)+(k_2+k_3)q(x_{n-1},x_n)\text{。} \tag{10}
$$

注意到 $e-k_3$ 是可逆的，故由式(6), (9)和(10)可得

$$
\begin{aligned}
q(x_n,Tx^*) &\preccurlyeq (e-k_3)^{-1}k_1q(x_{n-1},x^*)+ \\
&\quad (e-k_3)^{-1}(k_2+k_3)q(x_{n-1},x_n) \\
&\preccurlyeq (e-k_3)^{-1}k_1h^{n-1}(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)+ \\
&\quad (e-k_3)^{-1}(k_2+k_3)h^{n-1}(e-h)^{-1}q(x_0,x_1) \\
&= \left[(e-k_3)^{-1}k_1+(e-k_3)^{-1}(k_2+k_3)\right]\cdot \\
&\quad h^{n-1}(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\text{。}
\end{aligned} \tag{11}
$$

又 $\|h^n\|\to 0\ (n\to\infty)$，然后

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left[(e-k_3)^{-1}k_1+(e-k_3)^{-1}(k_2+k_3)\right]h^{n-1}(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\right\| \\
&\quad \leqslant \left\|\left[(e-k_3)^{-1}k_1+(e-k_3)^{-1}(k_2+k_3)\right]\right\| \\
&\quad \left\|h^{n-1}\right\|\left\|(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\right\|\to 0\ (n\to\infty)\text{。}
\end{aligned} \tag{12}
$$

联立式(11)和(12)得到

$$
\begin{aligned}
q(x_n,Tx^*) &\preccurlyeq \left[(e-k_3)^{-1}k_1+(e-k_3)^{-1}(k_2+k_3)\right]\cdot \\
&\quad h^{n-1}(e-h)^{-1}q(x_0,x_1)\to\theta\ (n\to\infty)\text{。}
\end{aligned} \tag{13}
$$

再结合式(9)和(13)，并利用引理2得到 $x^*=Tx^*$，即 x^* 是 T 的一个不动点。

第 2 步: 证明 $q(x^*,x^*)=\theta$。

由式(1)可得

$$
\begin{aligned}
q(x^*,x^*) &= q(Tx^*,Tx^*) \\
&\preccurlyeq k_1q(x^*,x^*)+k_2q(x^*,Tx^*)+k_3q(x^*,Tx^*) \\
&= (k_1+k_2+k_3)q(x^*,x^*) \\
&\preccurlyeq \cdots \\
&\preccurlyeq (k_1+k_2+k_3)^nq(x^*,x^*)\text{。}
\end{aligned} \tag{14}
$$

因为 $\rho(k_3)+\rho(k_1+k_2+k_3)<1$，得到 $\rho(k_1+k_2+k_3)<1$, 再由引理 4 可得 $(k_1+k_2+k_3)^n\to\theta\ (n\to\infty)$。再根据式(14), 得到 $q(x^*,x^*)=\theta$。

第 3 步: 证明唯一性。

假设 T 存在另外一个不动点 $y^*\in X$，即 $Ty^*=y^*$，则由式(1)和 $q(x^*,x^*)=\theta$ 可得

$$
\begin{aligned}
q(x^*,y^*) &= q(Tx^*,Ty^*) \\
&\preccurlyeq k_1q(x^*,y^*)+k_2q(x^*,Tx^*)+k_3q(x^*,Ty^*) \\
&= (k_1+k_3)q(x^*,y^*) \\
&\preccurlyeq (k_1+k_2+k_3)q(x^*,y^*)\text{。}
\end{aligned} \tag{15}
$$

与式(14)的处理过程类似，由式(15)易得 $q(x^*,y^*)=\theta$。

在上述过程中，已经得到 $q(x^*,x^*)=\theta$ 和 $q(x^*,y^*)=\theta$，因此 $\forall c\gg\theta$，存在 $u=c\gg\theta$，使得 $q(x^*,x^*)\ll u$ 和 $q(x^*,y^*)\ll u$。再由定义4的条件4，得到 $d(x^*,y^*)\ll c$。由 c 的任意性，取 $c_0\gg\theta$，使得 $d(x^*,y^*)\ll \frac{c_0}{n}\ (n\in\mathbb{N})$，从而 $\frac{c_0}{n}-d(x^*,y^*)\in \operatorname{int}P\subseteq P$。因为 $\frac{c_0}{n}-d(x^*,y^*)\to -d(x^*,y^*)\ (n\to\infty)$，而 P 为闭集，故 $-d(x^*,y^*)\in P$。又 $d(x^*,y^*)\in P$，所以 $d(x^*,y^*)=\theta$，即 $x^*=y^*$。

推论 1　设 (X,d) 为完备的赋值 Banach 代数 $\mathcal{A}$ 的锥度量空间，P 为 $\mathcal{A}$ 中的锥，q 为 X 上的 c-距离，$T:X\to X$ 为映射。若满足

$$
q(Tx,Ty)\preccurlyeq kq(x,y)\quad (\forall x,y\in X),
$$

其中 $k\in P$，使得 $\rho(k)<1$，则 T 在 X 中有唯一的不动点 x^*，且任意的迭代点列 $\{T^nx\}\ (x\in X)$ 都收敛到 x^*，并且还有 $q(x^*,x^*)=\theta$。

证明　在定理1中令 $k_1=k$，$k_2=k_3=\theta$，即得结论。

推论 2　设 (X,d) 为完备的锥度量空间，q 为 X 上的 c-距离，$T:X\to X$ 为映射。若满足

$$
q(Tx,Ty)\preccurlyeq k_1q(x,y)+k_2q(x,Tx)+k_3q(x,Ty)\quad (\forall x,y\in X),
$$

其中 $k_i\geqslant 0\ (i=1, 2, 3)$ 为实常数，且 $k_1+k_2+2k_3<1$，则 T 在 X 中有唯一的不动点 x^*，且任意的迭代点列 $\{T^nx\}\ (x\in X)$ 都收敛到 x^*，并且还有 $q(x^*,x^*)=\theta$。

证明　在定理 1 中取 $k_i\ (i=1,2,3)$ 为实常数即可。

推论3　设 (X,d) 为完备的锥度量空间，q 为 X 上的 c-距离，$T:X\to X$ 为映射。若满足

$$q(Tx,Ty)\preccurlyeq kq(x,y)\quad(\forall x,y\in X),$$

其中 $0\leqslant k<1$ 为实常数。则 T 在 X 中有唯一的不动点 x^*，且任意迭代点列 $\{T^n x\}\ (x\in X)$ 都收敛到 x^*，并且还有 $q(x^*,x^*)=\theta$。

证明　在推论 2 中取 $k_1=k, k_2=k_3=0$ 即可。

注 3　设在定理 1 中压缩条件(式(1))已经带有普遍意义，若把它变为更一般的压缩条件，例如变为 $q(Tx,Ty)\preccurlyeq k_1q(x,y)+k_2q(x,Tx)+k_3q(y,Ty)+k_4q(x,Ty)+k_5q(y,Tx)\ (\forall x,y\in X)$，由于 $q(x,y)$ 没有对称性，故即使改变系数所满足的条件，该定理证明起来也相当复杂，因此它不在本文的考虑范围之内。

注 4　定理1和推论1~3改进了文献[9–11]的主要结果。事实上，我们的结果不仅得到不动点的存在性，而且得到不动点的唯一性。文献[9–11]的结果仅得到不动点的存在性，没有得到不动点的唯一性。我们的结果没有涉及锥的正规性和映射的连续性，而文献[9–11]的结果强烈依赖于这两个条件。另外，我们的结果没有考虑与范数有关的条件，而文献[9–11]的结果都离不开这个条件。这些说明我们的结果是前人结果的补充和改进。例2说明了这一点。

例 2　设 $\mathcal{A}=C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$，其范数为 $\|x\|=\|x\|_\infty+\|x'\|_\infty\ (x\in\mathcal{A})$，并且规定乘法为通常的乘法，则 $\mathcal{A}$ 为带有单位元 $e=1$ 的 Banach 代数。令 $P=\{x\in\mathcal{A}:x=x(t)\geqslant 0,\ t\in[0,1]\}$，则 P 为 $\mathcal{A}$ 中的非正规锥[15]。令 $X=\{0,1,2\}$，定义 $d(x,y)(t)=|x-y|e^t\ (x,y\in X)$，则 (X,d) 为完备的赋值 Banach 代数 $\mathcal{A}$ 的锥度量空间。定义 $q(x,y)(t)=ye^t\ (x,y\in X)$，则 q 为 c-距离。事实上，只需要证明定义 4 的条件 4。因为 $d(x,y)(t)=|x-y|e^t\leqslant(x+y)e^t=q(z,x)+q(z,y)(\forall x,y,z\in X)$，再取 $u=\dfrac{c}{2}$ 即可。做映射 $T:X\to X$ 满足 $T0=T1=0,\ T2=1$，则 T 为不连续映射。做函数 $k_1=k_1(t),\ k_2=k_2(t)$ 和 $k_3=k_3(t)$，使其满足 $\dfrac{1}{2}\leqslant k_1(t)<1$，$k_2(t)=0$ 和 $k_3(t)=0$，其中 $0\leqslant t\leqslant 1$，则定理 1 的所有条件都满足。由定理1可得到 T 有唯一的不动点 $x^*=0$，且 $q(x^*,x^*)=0$。

最后，利用我们的结果解决下列初等方程解的存在性和唯一性问题：

$$\begin{cases} x=e^{x-\lambda}, \\ y=\arctan\left(e^{\frac{\lambda}{2}}+|y|\right)+\sin x, \end{cases}\tag{16}$$

其中 $\lambda>0$ 是一个常数。

定理2　方程(16)在 $[\alpha,\beta]\times(-\infty,+\infty)$ 内有唯一的解，其中 α,β 都为常数，$\alpha<\beta,\ 0<\beta<\lambda$。

证明　设 $\mathcal{A}=\mathbb{R}^2$，任取 $a=(a_1,a_2), b=(b_1,b_2)\in\mathcal{A}$，定义范数为 $\|(a_1,a_2)\|=|a_1|+|a_2|$，定义乘法为

$$ab=(a_1,a_2)(b_1,b_2)=(a_1b_1,a_1b_2+a_2b_1)。$$

令 $X=[\alpha,\beta]\times(-\infty,+\infty)$，$P=\{(a_1,a_2)\in\mathcal{A}:a_1,a_2\geqslant 0\}$，任取 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in X$，定义两个映射 $q,d: X\times X\to\mathcal{A}$ 为 $q(x,y)=d(x,y)=(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$，则 (X,d) 为完备的赋值 Banach 代数 $\mathcal{A}$ 的锥度量空间，q 为 X 上的 c-距离，且 $\mathcal{A}$ 有单位元 $e=(1,0)$。定义映射

$$Tx=T(x_1,x_2)=\left(e^{x_1-\lambda},\arctan(e^{\frac{\lambda}{2}}+|x_2|)+\sin x_1\right),$$

对任意的 $x,y\in X$，由微分中值定理可得到，存在介于 x_1 和 y_1 之间的数 ξ_1 并存在介于 x_2 和 y_2 之间的数 ξ_2，使得

$$\begin{aligned} &q(Tx,Ty)=q(T(x_1,x_2),T(y_1,y_2)) \\ &=\left(|e^{x_1-\lambda}-e^{y_1-\lambda}|,\left|\arctan\left(e^{\frac{\lambda}{2}}+|x_2|\right)-\right.\right. \\ &\quad\left.\left.\arctan\left(e^{\frac{\lambda}{2}}+|y_2|\right)+\sin x_1-\sin y_1\right|\right) \\ &\preccurlyeq\left(\frac{e^{\xi_1}}{e^{\lambda}}|x_1-y_1|,\ \frac{1}{1+(e^{\frac{\lambda}{2}}+|\xi_2|)^2}|x_2-y_2|+|x_1-y_1|\right) \\ &\preccurlyeq(e^{\beta-\lambda},1)(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|) \\ &=(e^{\beta-\lambda},1)q(x,y)。\end{aligned}$$

取 $k_1=(e^{\beta-\lambda},1),\ k_2=k_3=(0,0)$，则 $\rho(k_1)=e^{\beta-\lambda}<1$，于是定理1的所有条件都满足。故由定理1，$T$ 在 X 中有唯一的不动点，亦即方程(16)在 $[\alpha,\beta]\times(-\infty,+\infty)$ 内有唯一的解。

参考文献

[1] Bakhtin I A. The contraction mapping principle in almost metric space. Functional Analysis, 1989, 30: 26–37

[2] Czerwik S. Contraction mappings in *b*-metric spaces. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1993, 1(1): 5–11

[3] Jovanović M, Kadelburg Z, Radenović S. Common fixed point results in metric-type spaces. Fixed Point Theory and Application, 2010: 978121

[4] Abbas M, Parvaneh V, Razani A. Periodic points of *T*-Ćirić generalized contraction mappings in ordered metric spaces. Georgian Mathematical Journal, 2012, 19(4): 597–610

[5] Azam A, Fisher B, Khan M. Common fixed point theorems in complex valued metric spaces. Numericalá Functional Analysis and Optimization, 2011, 32(3): 243–253

[6] Mustafa Z, Sims B. A new approach to generalized metric space. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2006, 7(2): 289–297

[7] Matthews S G. Partial metric topology. General topology and Applications, 1994, 728: 183–197

[8] Huang Longguang, Zhang Xian. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 332(2): 1468–1476

[9] Cho Y J, Saadati R, Wang Shenghua. Common fixed point theorems on generalized distance in ordered cone metric spaces. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 61(4): 1254–1260

[10] Fadail Z M, Ahmad A B, Radenović S. Common fixed point and fixed point results under *c*-distance in cone metric spaces. Applied Mathematic and Information Sciences Letters, 2013, 1(2): 47–52

[11] Karapınar E, Kumam P, Sintunavarat W. Coupled fixed point theorems in cone metric spaces with a *c*-distance and applications. Fixed Point Theory and Applications, 2012: 194

[12] Liu Hao, Xu Shaoyuan. Cone metric spaces with Banach algebras and fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings. Fixed Point Theory and Applications, 2013: 320

[13] Huang Huaping, Radenović S, Došenović T. Some common fixed point theorems on *c*-distance in cone metric spaces over Banach algebras. Applied and Computational Mathematics, 2015, 14(2): 180–193

[14] 童裕孙. 泛函分析教程. 1 版. 上海: 复旦大学出版社, 2003: 49–80

[15] Huang Huaping. Conditions of non-normality in cone metric spaces. Mathematica Applicata, 2012, 25(4): 894–898