

# 轴向运动结构的能量关系和守恒量研究进展

陈立群

1. 上海大学力学系, 上海 200444; 2. 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;  
3. 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072; E-mail: lqchen@staff.shu.edu.cn

**摘要** 综述了轴向运动弦线和梁的能量关系和守恒量的研究进展。分别对于横向线性振动、横向非线性振动和耦合平面振动, 确定能量变化的关键量以及轴向运动结构总机械能的时间导数, 结果表明总机械能不是常数。对于上述振动, 构造在振动过程中保持不变的守恒量, 可以用来证明直线平衡位形的稳定性以及检验数值算法。最后提出若干有望取得进展的研究课题。

**关键词** 能量关系; 守恒量; 轴向运动弦线; 轴向运动梁; 非线性

**中图分类号** O32

## Advances in Energetics and Conserved Quantities of Axially Moving Structures

CHEN Liquan

1. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444; 2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072; 3. Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072; E-mail: lqchen@staff.shu.edu.cn

**Abstract** Progresses in investigations on energetics and conserved quantities are summarized. The key issue in energetics, the time-rate of the total mechanical energy of axially moving structures, is determined for linear transverse vibration, nonlinear transverse vibration, and coupled planer vibration. The result shows that the mechanical energy is not a constant. Conserved quantities are constructed so that the quantities remain unchanged during those vibrations. The conserved quantities can be used to prove stability of the straight equilibrium configurations and to check the numerical algorithms. Some promising topics are suggested for future research.

**Key words** energetics; conserved quantity; axially moving string; axially moving beam; nonlinearity

轴向运动弦线、梁和板等结构可以作为多种工程系统的力学模型。这些工程系统包括动力传送带、磁带、纸带、纺织纤维、带锯、空中缆车索道、高楼升降机缆绳、单索架空索道等。因为轴向运动结构是典型的陀螺连续体, 系统动力学方程中存在由于科氏加速度而产生的时间和奇数阶空间混合偏导数项, 所以对轴向运动结构的研究有重要理论意义。从 Aiken<sup>[1]</sup>和 Skutch<sup>[2]</sup>的先驱性工作开始, 运动结构的研究已经有百余年的历史, 目前仍是活跃的研究领域, 近年来取得重要进展<sup>[3-5]</sup>。

机械能是力学系统运动的重要特征量, 从能量观点分析是分析力学的特点<sup>[6]</sup>。关于运动结构的大量研究侧重于分析运动结构在横向振动过程中的能量变化。与静态弹性结构自由振动能量守恒不同, 即使在自由振动中, 运动弹性结构的能量也会发生变化, 此时, 借助分析力学中 Jacobi 积分的思路<sup>[7]</sup>, 可以构造守恒量。守恒量往往与对称性相伴随, 这也是分析力学研究的重要内容, 并且在离散力学系统中已经取得大量成果<sup>[8-9]</sup>。轴向运动结构的守恒量可以应用于稳定性分析等, 本文将总结轴向运动

弦线和梁的能量变化关系以及守恒量的研究进展。

## 1 运动结构的能量关系

两端固定的弦线和两端简支和固支的梁, 不受横向激励作用时, 在横向振动时系统总机械能保持不变。在同样的不动边界条件下, 如果弦线或梁有轴向运动, 情形将发生变化。早期研究工作揭示了这种可能性, Chubachi<sup>[10]</sup>首先考察了轴向运动弦线能量的周期性变化。Miranker<sup>[11]</sup>导出匀速轴向运动弦线自由振动的机械能时间偏导数, 并说明该偏导数通常不为零。Barakat<sup>[12]</sup>研究了轴向运动梁的能量变化, 尤其是支撑处的能量流动。Tabarrok 等<sup>[13]</sup>的研究表明, 无轴向力时轴向运动梁的机械能是时间的周期函数。这些研究已经表明轴向运动弦线和梁的机械能随时间变化。

Wickert 等<sup>[14]</sup>系统地研究了轴向运动弦线和梁的能量变化关系, 首次明确了机械能的时间全导数和偏导数的区别与联系。能量的全导数为能量的全局变化率, 偏导数为局部变化率, 全局变化率为局部变化率和单位长度机械能与轴向运动速度乘积在两端边界处的差值之和。他们还导出用轴向力、轴向速度等系统参数和横向位移及其空间导数的端点值表示的能量变化率, 说明总机械能在振动过程中不是常量。Wickert 等<sup>[14]</sup>还研究了轴向运动弦线和梁各个模态上的能量关系。Renshaw<sup>[15]</sup>用类似思路研究了两类绞弦的能量关系, 说明轴向运动边界的情形与静止情形有本质上的不同。Renshaw 等<sup>[16]</sup>进一步精确化了运动弦线和梁的总机械能概念, 区分了针对空间区域的 Euler 描述和针对弦线上质点的 Lagrange 描述, 并说明文献[14]中导出的能量变化率所采用的实际为 Lagrange 描述。至此, 在线性理论的框架内, 对运动弦线和梁的横向振动

过程中的能量变化已经有比较清晰的理解。

轴向运动弦线和梁的能量关系可以推广到更为复杂的情形。Lee 等研究了轴向运动弦线<sup>[17]</sup>、轴向运动梁和输液管<sup>[18]</sup>的能量变化。他们考虑在边界上作用有非保守力, 这样, 在能量关系中就需要考虑边界上力所做的功。他们从能量角度, 用行波方法确定了最优阻尼系数以实现镇定<sup>[17-18]</sup>。Lee 等<sup>[19]</sup>还研究了受静态质量-弹簧-阻尼振子横向约束的轴向运动弦线中的能量传递, 通过计算弦线中行波在接触约束前后的能量变化, 得到传递到约束上的能量。Zhu 等<sup>[20]</sup>研究了变长度、带轴向质量-弹簧-阻尼振子的轴向运动弦线和梁的能量关系, 并应用于稳定性分析。

在轴向运动结构横向线性振动理论的能量关系研究相对成熟之后, Chen 等<sup>[21]</sup>提出轴向运动弦线和梁在横向非线性振动中的能量关系, 他们采用 Euler 描述, 导出机械能时间变化率与系统参数和边界值的关系。他们采用的弦线非线性横向振动的模型是 Mote 模型(一种偏微分方程<sup>[22]</sup>), 而进一步的研究工作表明弦线 Kirchhoff 模型(一种偏微分-积分方程)更接近平面运动方程的结果<sup>[23]</sup>。Chen 等<sup>[24]</sup>基于轴向运动弦线的 Kirchhoff 模型, 导出了能量时间变化率。

无论是 Mote 模型还是 Kirchhoff 模型, 都是结构平面振动向横向振动的退化。Chen<sup>[25]</sup>研究了轴向运动弦线平面运动的能量关系。考虑图 1 所示轴向变速运动弹性弦线, 设密度为  $\rho$ 、截面积为  $A$ 、弹性模量为  $E$ 、初始张力为  $P_0$  的弦线, 以一致的速度沿轴向移动, 速度  $\gamma(t)$  是时间  $t$  的函数。在轴向坐标  $x$  处, 弦线的运动可以用弦线微段相对于以速度平动的空间参照系的轴向和横向位移  $u$  和  $v$  来描述。系统总机械能为

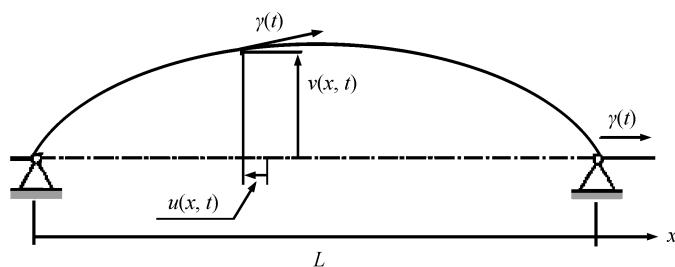


图 1 轴向变速运动弦线示意图<sup>[25]</sup>

Fig. 1 Schematic of an axially accelerating string<sup>[25]</sup>

$$\varepsilon = \int_0^L \left\{ \frac{\rho A}{2} [(\gamma + u_t + \gamma u_{,x})^2 + (v_t + \gamma v_{,x})^2] + \left( P_0 + \frac{1}{2} EA \varepsilon \right) \varepsilon \right\} dx, \quad (1)$$

其中,  $\varepsilon(x, t)$  为由于位移产生的应变

$$\varepsilon = \sqrt{(1 + u_{,x})^2 + v_{,x}^2} - 1. \quad (2)$$

应用弦线平面运动的控制方程<sup>[26]</sup>, 导出能量的时间变化率为

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = [(\gamma + u_t + \gamma u_{,x})P_u + (v_t + \gamma v_{,x})P_v]_0^L - \gamma \hat{\varepsilon}_0^L, \quad (3)$$

其中,  $P_u$  和  $P_v$  分别为弦线张力的轴向和侧向投影:

$$P_u = \frac{(P_0 + EA\varepsilon)(1 + u_{,x})}{\sqrt{(1 + u_{,x})^2 + v_{,x}^2}}, P_v = \frac{(P_0 + EA\varepsilon)v_{,x}}{\sqrt{(1 + u_{,x})^2 + v_{,x}^2}}. \quad (4)$$

单位长度能量定义为

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\rho A}{2} [(\gamma + u_t + \gamma u_{,x})^2 + (v_t + \gamma v_{,x})^2] + \left( P_0 + \frac{1}{2} EA \varepsilon \right) \varepsilon. \quad (5)$$

此结果还可以推广到弦线轴向、横向和侧向的三维运动<sup>[27]</sup>。轴向运动梁平面运动中也有类似的能量关系, 但需要考虑弯曲变形的能量<sup>[5]</sup>。

## 2 运动结构的守恒量及其应用

轴向运动结构能量不守恒, 其原因为轴向运动的存在导致系统动能不是速度的二次齐次式。借鉴分析力学中 Jacobi 广义能量积分, 可以构造轴向运动结构到守恒量<sup>[7]</sup>。

在横向线性振动的框架内, Miranker<sup>[11]</sup>构造了匀速轴向运动弦线自由振动 Euler 描述的守恒量。Renshaw 等<sup>[16]</sup>构造了轴向运动梁的 Euler 描述的守恒量以及轴向运动弦线和梁的 Lagrange 描述的守恒量。在非线性的 Euler 描述下, Chen 等<sup>[21]</sup>构造了轴向运动弦线和梁横向非线性振动中的守恒量, 其中, 弦线和梁的控制方程均是非线性偏微分方程。鉴于轴向运动弦线和梁横向振动的偏微分-积分模型比偏微分模型更接近平面运动模型<sup>[23,28-29]</sup>, Chen 等基于轴向运动结构的偏微分-积分模型, 构造了轴向运动弦线<sup>[24]</sup>和梁的守恒量<sup>[30]</sup>。所构造的守恒量具有能量的量纲, 因此是非保守系

统中的类能量守恒量<sup>[31]</sup>。

横向运动的守恒量也可以推广到平面运动。在前面所述的轴向运动弦线平面振动中, 若边界处无横向运动和轴向变形, 且轴向运动速度为常数  $c$ , 则存在守恒量

$$I = \int_0^L \left\{ \frac{\rho A}{2} [(u_t^2 - c^2 u_{,x}^2) + (v_t^2 - c^2 v_{,x}^2)] + \left( P_0 + \frac{1}{2} EA \varepsilon \right) \varepsilon \right\} dx, \quad (6)$$

其时间全导数为零。对于轴向、横向和侧向的三维运动的轴向运动弦线, 也存在相应的守恒量<sup>[27]</sup>。附加弯曲变形对应的变形能项后, 也可以构造类似的守恒量<sup>[5]</sup>。

为了形象展示能量的变化和守恒量的不变化, 这里给出一个算例。考虑弹性模量  $E=7.8 \times 10^6$  Pa 和密度  $\rho=930$  kg/m<sup>3</sup> 的弹性弦线, 其截面积  $A=3.14 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>, 长度  $l=1$  m, 初始张力  $P_0=10$  N。在轴向运动速度为  $c=40$  m/s 时, 系统的能量(不包括为常量的整体平动动能  $\rho A c^2/2$ )和守恒量如图 2 所示。

运动结构守恒量研究中, 一个值得关注的新领域是变长度弦线和梁的守恒量。Yang 等基于一阶 Galerkin 阶段构造了轴向伸展梁<sup>[32]</sup>和收缩梁<sup>[33]</sup>的绝热不变量。他们的结论是针对离散化系统得到的, 对于原来的连续系统, 相应结论是否成立, 还有待深入研究。

在轴向运动结构中, 守恒量可以应用于稳定性分析。文献[24]和[30]分别应用守恒量证明, 对于亚临界速度, 轴向运动弦线和梁横向非线性振动的

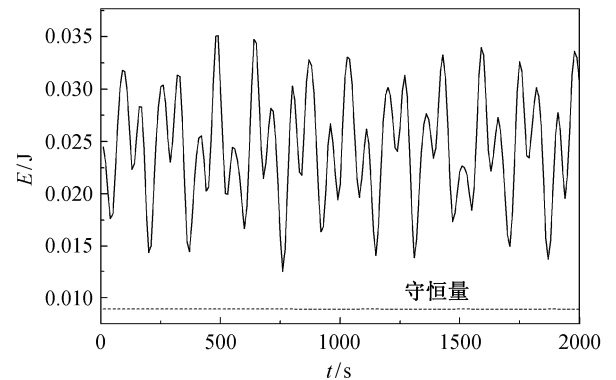


图 2 能量变化和守恒量

Fig. 2 Variation of energy and conserved quantity

直线平衡位形稳定;文献[25]证明轴向运动弦线平面运动的直线平衡位形也稳定。

守恒量还可以应用于轴向运动弦线仿真算法的检验。Chen 等分别利用基于静态弦线模态的 Galerkin 方法<sup>[34]</sup>、基于 Hermite 函数的 Galerkin 方法<sup>[35]</sup>、对于空间变量的差分离散化<sup>[36]</sup>和对于空间和时间变量的差分离散化<sup>[37]</sup>几类算法,对仿真结果进行检验,发现这些算法都能保证守恒量不变。

### 3 结论与展望

本文综述了轴向运动结构能量关系和守恒量方面的研究进展。已有的研究工作建立了轴向运动结构横向和平面运动中,系统能量变化与边界能量输入的关系。这些关系表明,即使对于固定边界,系统能量也不守恒。同时,构造了相应的具有能量量纲的守恒量。

关于能量关系和守恒量,还有一些值得深入研究的课题。

1) 更复杂的平动结构,如板壳的能量关系和守恒量。例如,面内运动板横向振动已经取得若干进展<sup>[38]</sup>,但其能量关系和守恒量还没有开展研究。

2) 能量关系和守恒量在运动结构稳定性分析、数值结果检验以及数值离散格式和控制律设计等方面的应用。

3) 更深入的守恒量物理机理研究。目前所构造的守恒量都是基于时间均匀性的 Noether 对称性的应用。近年来,分析力学界在离散系统的对称性和守恒量研究中取得重要的进展<sup>[9]</sup>,或许有助于深入理解运动结构守恒量的物理机理,并有助于构造新的守恒量。

### 参考文献

- [1] Aiken J. An account of some experiments on rigidity produced by centrifugal force. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2009, 5(29): 81–105
- [2] Skutch R. Über die Bewegung eines gespannten Fadens, weicher gezwungen ist, durch zwei feste Punkte, mit einer constanten Geschwindigkeit zu gehen, und zwischen denselben in Transversal-schwingungen von geringer Amplitude versetzt wird. *Annalen der Physik und Chemie*, 1897, 61: 190–195
- [3] Chen L Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings. *ASME Applied Mechanics Reviews*, 2005, 58(2): 91–116

- [4] 陈立群. 轴向运动弦线和梁的非线性动力学 // 胡海岩, 张伟. 非线性动力学理论与应用的新进展. 北京: 科学出版社, 2009: 490–535
- [5] Chen L Q. Nonlinear vibrations of axially moving beams // Evans T. *Nonlinear Dynamics*. East Providence, RI: INTECH, 2010: 145–172
- [6] 陈立群. 关于分析力学的定义. *力学与实践*, 2015, 37(5): 634–635
- [7] 陈滨. 分析动力学. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2012
- [8] 赵跃宇, 梅凤翔. 力学系统的对称性和不变量. 北京: 科学出版社, 1999
- [9] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性和守恒量. 北京: 北京理工大学出版社, 2004
- [10] Chubachi T. Lateral vibration of axially moving wire or belt materials. *Bulletin Japanese Society Mechanical Engineering*, 1958, 1(1): 24–29
- [11] Miranker W L. The wave equation in a medium in motion. *IBM Journal of Research Development*, 1960, 4(1): 36–42
- [12] Barakat R. Transverse vibrations of a moving thin rod. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, 43(3): 533–539
- [13] Tabarrok B, Leech C M, Kim Y I. On the dynamics of an axially moving beam. *Journal of the Franklin Institute*, 1974, 297: 201–220
- [14] Wickert J A, Jr Mote C D. On the energetics of axially moving continua. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1989, 85(3): 1365–1368
- [15] Renshaw A A. The energetics of winched strings. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, 119(4): 643–644
- [16] Renshaw A A, Rahn C D, Wickert J A, et al. Energy and conserved functionals for axially moving materials. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 1998, 120(2): 634–636
- [17] Lee S Y, Jr Mote C D. A generalized treatment of the energetics of translating continua, part 1: strings and second order tensioned pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 204(5): 717–734
- [18] Lee S, Jr Mote C D. A generalized treatment of the energetics of translating continua, part 2: beams and fluid conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 204(5): 735–753
- [19] Lee S Y, Jr Mote C D. Traveling wave dynamics in a translating string coupled to stationary constraints:

- energy transfer and mode localization. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 212(1): 1–22
- [20] Zhu W D, Ni J. Energetics and stability of translating media with an arbitrarily varying length. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2000, 122(3): 295–304
- [21] Chen L Q, Zu J W. Energetics and conserved functional of moving materials undergoing transverse nonlinear vibration. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2004, 126(3): 452–455
- [22] Mote C D Jr. On the nonlinear oscillation of an axially moving string. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33: 463–464
- [23] Chen L Q, Ding H. Two nonlinear models of the transversely vibrating string. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, 18(5): 321–328
- [24] Chen L Q, Zhao W J. The energetics and the stability of axially moving Kirchhoff strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2005, 117(1): 55–58
- [25] Chen L Q. The energetics and the stability of axially moving strings undergoing planar motion. *International Journal of Engineering Science*, 2006, 44(18/19): 1346–1352
- [26] Thurman A L, Mote C D Jr. Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1969, 36(1): 83–91
- [27] Chen L Q, Lim C W, Ding H. Energetics and conserved quantity of an axially moving string undergoing three-dimensional nonlinear vibration. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, 24(2): 315–221
- [28] Ding H, Chen L Q. On two transverse nonlinear models of axially moving beams. *Science in China: Series E*, 2009, 52(3): 743–751
- [29] Chen L Q, Ding H. Steady-state transverse response in planar vibration of axially moving viscoelastic beams. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 2010, 132(1): 011009
- [30] Chen L Q, Zhao W J. A conserved quantity and the stability of axially moving nonlinear beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 286(3): 663–668
- [31] Chen L Q. An energy-like conserved quantity of a nonlinear nonconservative continuous system. *Chinese Science Bulletin*, 2004, 49(12): 1224–1226
- [32] Yang X D, Zhang W, Melnik R V. Energetics and invariants of axially deploying beam with uniform velocity [J/OL]. *AIAA Journal*, 2016: 1–7 [2016–05–25]. <http://dx.doi.org/10.2514/1.J054383>
- [33] Yang X D, Liu M, Zhang W, Melnik R V. Invariant and energy analysis of an axially retracting beam [J/OL]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016 [2016–06–22]. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cja.2016.06.009>
- [34] Chen L Q, Zhao W J, Ding H. On Galerkin discretization of axially moving nonlinear strings. *Acta Mechanica Sinica Solida*, 2009, 22(4): 369–376
- [35] Chen L Q, Zhao W J. A computation method for nonlinear vibration of axially accelerating viscoelastic strings. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 162(1): 305–310
- [36] Chen L Q, Zhao W J, Zu J W. Simulations of transverse vibrations of an axially moving string: a modified difference approach. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 166(3): 596–607
- [37] Chen L Q, Zhao W J. A numerical method for simulating transverse vibrations of axially moving strings. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 160(2): 411–422
- [38] 唐有绮, 陈立群. 面内运动板横向振动研究进展. *固体力学学报*, 2015, 36(2): 93–104