北京大学学报(自然科学版) 第 52 卷 第 4 期 2016 年 7 月
Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 52, No. 4 (July 2016)
doi: 10.13209/j.0479-8023.2016.084

空间物体点接触纯滚动的几何意义

赵振[1,†] 刘才山[2] 鲁建东[3]

1. 北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191; 2. 北京大学工学院, 北京 100871; 3. 北京印刷学院, 北京 102600;
† E-mail: bhzhaozhen@buaa.edu.cn

摘要 空间物体间点接触纯滚动的相互作用一般包含非完整约束, 而约束所限制的虚位移通常采用速度水平的 Appell-Chetaev 条件给出, 因此点接触纯滚动约束对应的几何意义并不直观。作者从多体系统中两物体沿其轮廓面做点接触纯滚动的问题出发, 探讨此类非完整约束对应的几何意义。首先, 提出两物体保持点接触的充分必要条件, 并以球–面系统为例推导接触时的约束方程。然后, 由空间物体点接触纯滚动的几何和速度约束, 推导此时满足的两种几何限制条件。结果表明, 采用两种几何条件获得的虚位移与速度约束的 Appell-Chetaev 条件相同。因此, 可以认为保持点接触纯滚动的空间两物体在位形空间受到两种几何条件的约束限制。

关键词 点接触; 约束方程; 非完整约束; Appell-Chetaev 条件
中图分类号 O316

On Nonholonomic Constraints about the Pure Rolling of Point Contact

ZHAO Zhen[1,†], LIU Caishan[2], LU Jiandong[3]

1. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191; 2. School of Engineering, Peking University, Beijing 100871; 3. Beijing Institution of Communication, Beijing 102600;
† E-mail: bhzhaozhen@buaa.edu.cn

Abstract Nonholomonic constraints are involved for 3D point-contact problems. The virtual displacements restricted by the constraints are usually given by Appell-Chetaev's rule. It has not been very clear of the geometric meaning in configuration space for Appell-Chetaev's rule of nonholonomic constraints. The authors investigate point contact with pure rolling by two rigid bodies in a multibody system to discover its geometric sense. First, the sufficient and necessary conditions of point contact are given. A ball-plane system is presented to demonstrate the validation of the conditions by deducing the system's obvious contact constraint originating from them. Two geometric restrictions for pure rolling are obtained by the nonholonomic constraints of pure rolling as well as the contact constraint in velocity level. It proves that the virtual displacements of the two restrictions are same as those of the constraints of point contact with pure rolling obtained by Appell-Chetaev's rule. So, it is thought that the constraints of pure rolling are constructed by the two geometric restrictions.

Key words point contact; constraint equation; nonholonomic constraint; Appell-Chetaev's rule

如果系统 $\boldsymbol{q}=(q_1, q_2, ..., q_n)$ 受到非完整约束

$$f(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)=0 \tag{1}$$

的作用, 并且此约束的虚位移满足下式[1]:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i=0\,, \tag{2}$$

则式(2)称为 Appell-Chetaev 条件。经典分析力学指出, 如果式(1)为完整约束, 则式(2)的几何意义

国家自然科学基金(11572017)、北京市教育委员会科技计划面上项目(KM201310015001)和北京市优秀人才培养项目(2012D005004000002)资助

收稿日期: 2015–11–23; 修回日期: 2016–02–13; 网络出版日期: 2016–07–12

为约束积分曲面时间凝固后的任一无穷小位移。但是，如果式(1)为非完整的，则式(2)的几何意义就很不直观。本文从空间物体点接触纯滚动的问题入手，讨论此时非完整约束虚位移(式(2))的几何意义。

1 球在水平面上的纯滚动

半径为 R 的球在粗糙水平面上做纯滚动，在水平面建立惯性直角坐标系 $Oxyz$，球中心在惯性直角坐标系下的分量表示为 (q_1, q_2, q_3)，欧拉角为 (q_4, q_5, q_6)，粗糙水平面的位置 $z=0$，球在粗糙水平面上做纯滚动的约束方程可写为

$$\begin{cases} q_3 = R, \\ \boldsymbol{v}_r^{\tau} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{v}_r^{\tau}$ 为接触点的速度在水平面上的分量。式(3)的第 1 个等式为完整约束，而第 2 个等式一般为两个非完整约束。对于非完整约束，其虚位移可由 Appell-Chetaev 条件(式(2))给出。通过拉格朗日乘子把约束嵌入到动力学方程中。

受到完整约束作用的系统只能沿着完整约束规定的几何限制运动，而受非完整约束作用的系统，其位形空间似乎并不受这些约束的任何限制。以球–面系统为例，只要外力允许，平面上的任何点都是可达的。但是根据 Appell-Chetaev 条件，系统在每一位置的位形空间似乎不是完全自由的，因为广义坐标虚位移并不是完全独立的。

本文从点接触问题入手，探讨一般情况下空间物体点接触和纯滚动时约束(式(3))的由来。我们认为，非完整约束的最初定义是一些力学家对某类问题(如雪橇问题以及点接触的纯滚动问题)直观的总结，他们直接把约束形式定义在速度水平上，从而掩盖了形成非完整约束所需的几何位形条件。本文认为，对于点接触的非完整约束由位形空间上两个完整的约束组成，这两个完整约束在速度水平表达相同，同时，这两种完整约束限制的虚位移正好满足 Appell-Chetaev 条件。

2 保持点接触的几何条件

两个物体形成并保持点接触运动需要满足以下两个条件。

C1：两接触点具有相同的空间位置(或它们的距离一直为零)。

C2：两物体的外表面在接触点相切。

只要两物体保持点接触，除点与线或者点与面接触时 C2 不存在外，上述两个条件都需成立。因此，对于具有一般外形的两物体的点接触问题，可从上述两个条件出发，推导此时系统的约束方程[2–3]。下面以球在固定水平面上运动为例，从上述两个条件获得约束(式(3))的第一个方程 $q_3 = R$。

设在惯性直角坐标系下，球的中心位置和姿态欧拉角分别为 (q_1, q_2, q_3) 和 (q_4, q_5, q_6)。在球的中心建立随体直角坐标系 $Cx'y'z'$，在随体坐标系下，球上每一点 (χ_1, χ_2, χ_3) 可以用球面坐标的两个参数 (ξ_1, ξ_2) 来表示。

$$\begin{cases} \chi_1 = R\sin\xi_2\cos\xi_1, \\ \chi_2 = R\sin\xi_2\sin\xi_1, \\ \chi_3 = R\cos\xi_2 \text{。} \end{cases}$$

由于球面和二维欧氏空间的非同胚性，所以 $\xi_2 = 0$ 或 $\xi_2 = \pi$ 为奇异点[4]，因此，接触点应避免在这些奇异点附近出现。利用广义坐标的几何意义，球面任意一点在惯性直角坐标系下的坐标可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{A}(q_4, q_5, q_6)\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{A}(q_4, q_5, q_6)R\begin{bmatrix} \sin\xi_2\cos\xi_1 \\ \sin\xi_2\sin\xi_1 \\ \cos\xi_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos q_4 & -\sin q_4 & 0 \\ \sin q_4 & \cos q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin q_5 & 0 & \cos q_5 \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{。}$$

与此类似，利用两个表面参数 (ζ_1, ζ_2) 可以表示水平面上的任意一点:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ 0 \end{bmatrix}\text{。} \tag{5}$$

如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 表示球和平面上的两个接触点，根

据点接触条件 C1，它们具有相同的空间位置：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\Rightarrow\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}+\boldsymbol{A}(q_4,q_5,q_6)R\begin{bmatrix}\sin\xi_2\cos\xi_1\\\sin\xi_2\sin\xi_1\\\cos\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\zeta_1\\\zeta_2\\0\end{bmatrix}。\tag{6}$$

将式(4)和(5)代入式(6)中，得到

$$\begin{cases}q_1+R\cos q_4(\sin q_5\cos\xi_2+\cos q_5\sin\xi_2\cos(q_6+\xi_1))=\zeta_1,\\q_2+R\sin q_4(\sin q_5\cos\xi_2+\cos q_5\sin\xi_2\cos(q_6+\xi_1))=\zeta_2,\\q_3+R(\cos q_5\cos\xi_2-\sin q_5\sin\xi_2\cos(q_6+\xi_1))=0。\end{cases}\tag{7}$$

根据点接触条件 C2，球与水平面在接触点相切：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_1}\cdot\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_1}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_2}\right)=0,\\\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_2}\cdot\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_1}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_2}\right)=0,\end{cases}\tag{8}$$

由式(4)可得到接触点的切矢量：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_1}=\boldsymbol{A}(q_4,q_5,q_6)R\begin{bmatrix}-\sin\xi_2\sin\xi_1\\\sin\xi_2\cos\xi_1\\0\end{bmatrix},\\\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_2}=\boldsymbol{A}(q_4,q_5,q_6)R\begin{bmatrix}\cos\xi_2\cos\xi_1\\\cos\xi_2\sin\xi_1\\-\sin\xi_2\end{bmatrix}。\end{cases}\tag{9}$$

将式(9)代入式(8)，并考虑球–面系统的特殊情况：$\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_1}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_2}\right)=[0,0,1]$，可以得到

$$\begin{cases}\sin q_5\sin\xi_2\sin(q_6+\xi_1)=0,\\-\sin q_5\cos\xi_2\cos(q_6+\xi_1)-\cos q_5\sin\xi_2=0。\end{cases}\tag{10}$$

为了避免奇异性，我们不研究接触点在 $\sin q_5=0$ 或 $\sin\xi_2=0$ 附近的接触情况。因此 $\sin q_5\neq0$，$\sin\xi_2\neq0$，则式(10)的解为

$$\sin(q_6+\xi_1)=0,\ \cos(q_6+\xi_1)=1,\ \sin(q_5+\xi_2)=0,\tag{11a}$$

或者

$$\sin(q_6+\xi_1)=0,\ \cos(q_6+\xi_1)=-1,\ \sin(q_5-\xi_2)=0,\tag{11b}$$

即

$$\begin{cases}\xi_1=-q_6+k\pi,\\\xi_2=-q_5+n\pi,\ \text{当}\ k\ \text{为偶数},\ n\in Z,\\\xi_2=q_5-n\pi,\ \ \text{当}\ k\ \text{为奇数},\ n\in Z。\end{cases}\tag{12}$$

为了消去式(7)和(11)中的参数，把最终的约束方程只表示为系统的广义坐标和时间的函数形式，则将式(11)代入式(7)的第 3 个方程，得到

$$q_3=\pm R。\tag{13}$$

式(13)就是球与水平面接触的约束方程，式中的正负号以及式(12)中 k 和 n 的取值由初始时刻的接触点决定。

参数方程(式(6)和(8))由点接触保持的两个条件 C1 和 C2 给出。对于具有一般形状物体的接触问题，得出的参数方程很难像球–面系统一样能够消去接触面的参数，得到如式(13)所示的只含系统广义坐标和时间的约束方程。这时，我们可以采用数值的微分方法，解出式(6)和(8)决定的接触点和接触约束方程。数值方法需要初始接触点的参数位置，能够唯一确定如方程(12)和(13)中的待定符号[2]。

3　保持点接触纯滚动的几何条件

如果多体系统 $\boldsymbol{q}=(q_1,\ q_2,...,q_n)$ 中两物体保持点接触，(ξ_1,ξ_2) 和 (ζ_1,ζ_2) 为两物体表面轮廓曲纹坐标表示的接触点对，根据接触点局部曲纹坐标到整体惯性坐标的关系，两个接触点在惯性坐标性下的坐标可以表示为 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q},t,\xi_1,\xi_2)$ 和 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q},t,\zeta_1,\zeta_2)$。两物体保持点接触意味着它们满足 C1 的几何条件，即两点在空间重合：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q},t,\xi_1,\xi_2)-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q},t,\zeta_1,\zeta_2)=0。\tag{14}$$

式(14)两边对时间求导数(接触点也随系统位形或时间的变化而变化)，得到

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_r+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_i}\dot{\xi}_i-\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_i}\dot{\zeta}_i\right)=0,\tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{v}_r$ 定义为接触点的相对速度：

$$\boldsymbol{v}_r(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\xi_1,\xi_2,\zeta_1,\xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial t}。\tag{16}$$

两物体除保持点接触外，还要满足接触点切向相对速度为零的纯滚动条件(对应球–面系统的方程(3)中的第 2 个方程)：

$$\boldsymbol{v}_r^{\tau}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t,\xi_1,\xi_2,\zeta_1,\xi_2)=0,\tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{v}_r^{\tau}$ 为接触点切向相对速度，满足

$$\boldsymbol{v}_r^{\tau}=\boldsymbol{v}_r-(\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n},$$

这里定义 $\boldsymbol{n}$ 为接触点处公法线方向的单位矢量。

因为 $\boldsymbol{n}$ 被设为接触点处公法线方向的单位矢

量，根据点接触条件 C2，即两物体在接触点相切，可得 $\partial\boldsymbol{v}/\partial\xi_i\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\partial\boldsymbol{y}/\partial\zeta_i\cdot\boldsymbol{n}=0$。因此，式(15)两边同时乘以公法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$，可得

$$\boldsymbol{v}_r^n \triangleq \boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{n}=0\text{。} \tag{18}$$

如果两物体保持点接触并纯滚动，则式(17)和(18)意味着接触点的相对速度为零:

$$\boldsymbol{v}_r=0\text{。} \tag{19}$$

将式(19)代入(15)中，得到

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_i}\mathrm{d}\,\xi_i-\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_i}\mathrm{d}\,\zeta_i\right)=\boldsymbol{0}\text{。} \tag{20}$$

只要两物体保持点接触纯滚动，则式(20)成立，意味着

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_i}\dot{\xi}_i-\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_i}\dot{\zeta}_i\right)=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial s_1}\dot{s}_1-\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial s_2}\dot{s}_2=\boldsymbol{0}, \tag{21}$$

其中 s_1 和 s_2 为两个接触点在两物体表面形成迹线的弧长，于是可用 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q},t,s_1)$ 和 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{q},t,s_1)$ 表示两个接触点。因此，从式(21)可以得到点接触纯滚动的几何意义。

1) 两接触物体绕着接触点转动:

$$s_1=s_2=0\text{。} \tag{22}$$

2) 接触点在物体表面形成的迹线弧长相等并相切:

$$s_1=s_2,\ \frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial s_1}=\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial s_2}\text{。} \tag{23}$$

式(23)的第 2 个等式虽然是空间矢量方程，但定义在公切平面上，因此只限制了一个自由度。

点接触纯滚动的这两个几何限制条件可以总结为：点接触纯滚动时，两物体滚过的迹线长度相同(或为零)，并且方向相切(如果存在)。

下面研究空间两物体点接触时，具有式(22)和(23)几何约束特征系统的虚位移。由于系统保持点接触，即 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，所以系统广义坐标虚位移 $(\delta q_1,\delta q_2,\dots,\delta q_n)$ 满足此方程，这些广义坐标虚位移也会引起接触点的虚位移，用接触点参数表示为 $(\delta\xi_1,\delta\xi_2)$ 和 $(\delta\zeta_1,\delta\zeta_2)$。因此得到

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_i}\delta\xi_i-\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_i}\delta\zeta_i\right)=0\text{。} \tag{24}$$

由于两物体保持点接触纯滚动，所以接触点的虚位移满足式(22)或(23)的几何限制条件:

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\xi_i}\delta\xi_i-\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\zeta_i}\delta\zeta_i\right)=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial s_1}\delta s_1-\frac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial s_2}\delta s_2=0, \tag{25}$$

把式(25)代入(24)，具有点接触纯滚动的两物体的系统在位形空间上应满足的虚位移限制方程为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial q_i}\delta q_i=0\text{。} \tag{26}$$

这与利用 Appell-Chetaev 条件(式(2))从速度水平约束(式(19)，同时参考式(16)获得的虚位移相同。因此可以认为，做纯滚动的两个物体在位形空间上满足式(22)或(23)的几何限制条件。

4 结论

对于完整约束，Appell-Chetaev 条件具有明确的几何意义。但是对于非完整约束，此条件的几何意义并不直观。空间两物体保持点接触纯滚动时，其速度水平的约束方程是两物体接触点的相对速度为零，其中接触切向相对速度为零的约束方程一般为非完整的。本文通过推导发现，空间两物体点接触纯滚动要满足两种几何条件的限制：两接触物体滚过迹线的长度相同(或为零)，并且方向相切(如果存在)。两种几何条件限定的虚位移与此时速度约束方程的 Appell-Chetaev 条件所限制的虚位移相同。本文研究对于加强分析力学中虚位移原理的基本地位具有一定的意义。

参考文献

[1] 梅凤翔，尚玫．理论力学Ⅱ：专题教程．北京：高等教育出版社，2012

[2] Zhen Zhao, Liu Caishan. Contact constraints and dynamical equations in Lagrangian systems [J/OL]. Multibody System dynamics, 2016 [2016–02–13]. http://dx.doi.org/10.1007/s11044-016-9503-1

[3] Pfeiffer F. Unilateral problems of dynamics. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69(8): 503–527

[4] 陈滨．分析力学．2 版．北京：北京大学出版社，2012