北京大学学报(自然科学版) 第 52 卷 第 4 期 2016 年 7 月
Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 52, No. 4 (July 2016)
doi: 10.13209/j.0479-8023.2016.070

述 评
Review

变分法逆问题研究的若干进展

丁光涛

安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000; E-mail: dgt695@sina.com

摘要 概述变分法逆问题的基本内容和国内在此领域的若干进展。重点阐述由力学系统第一积分构造 Lagrange 函数的新方法, 指出利用此方法能够得到等价的 Lagrange 函数和函数族。举例说明该方法的理论意义和应用价值。最后指出, 应当重视变分法逆问题的研究。

关键词 变分法逆问题; Lagrange 函数; 运动微分方程; 第一积分; Lagrange 函数族

中图分类号 O316

Some Progressions in Study of the Inverse Problem of the Calculus of Variations

DING Guangtao

College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000; E-mail: dgt695@sina.com

Abstract Several aspects of the inverse problem of the calculus of variations and a short overview of the domestic development of this problem are presented. The main topic is a new method to construct Lagrangians from the first integral of mechanical system, and the equivalent Lagrangians and family of Lagrangians can be obtained by the new method. Some examples are given to illustrate the theoretical significance and the application value of this method. Finally, it is pointed out that great attention should be paid to the study of the inverse problem of the calculus of variations.

Key words the inverse problem of the calculus of variations; Lagrangian; differential equations of motion; first integral; family of Lagrangians

传统的分析动力学中重要的积分变分原理是 Hamilton 原理[1]: 双面理想完整有势系统, 在由广义坐标描述系统位形的事件空间 $E[q_i,\ t]$中, 从 A 点(q_i^0, t_0)出发到 B 点(q_i^1, t_1)的所有约束可能轨道中, 真实的动力学轨道是使 Hamilton 作用量泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1} L(q_i,\dot{q}_i,t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

成为驻定值的轨道, 即对此轨道作用量泛函一阶变分为零:

$$\delta J=\delta\int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t=0\ 。\tag{2}$$

泛函中的被积函数 $L(q_i,\dot{q}_i,t)$ 为力学系统的 Lagrange 函数, 容易证明上述变分原理与下列 Lagrange 方程等价:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,...,n)\ 。\tag{3}$$

解此运动微分方程, 得到全部 $q_i(t)$, 就确定了真实的动力学轨道, 即泛函的驻定轨道。简而言之, 如果不考虑泛函的直接求解, 那么力学变分原理正问题就是由给出系统的 Lagrange 函数确定系统的驻定轨道。

存在正问题就有对应的逆问题, 变分法逆问题是数学、力学以及物理学领域中古老而又常新的课题[2–6]。根据上述变分法正问题, 与之直接对应的

国家自然科学基金(11472063)资助

收稿日期: 2015–10–04; 修回日期: 2016–02–03; 网络出版日期: 2016–07–14

逆问题应是给出系统作用量泛函的驻定轨道，如何确定系统的 Lagrange 函数[6]。但是，通常给出的不是系统的驻定轨道，而是确定系统动力学轨道的运动微分方程。因此，实际上变分法逆问题的提法如下。给定系统的运动微分方程

$$F_i(\ddot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)=M_{ij}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)\ddot{q}_j+N_i(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q},t)$$
$$=0,[\det(M_{ij})\neq 0], \tag{4}$$

是否存在某个 Lagrange 函数 $L(q_i,\dot{q}_i,t)$，使这组方程直接由变分原理导出，即写成 Lagrange 方程形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=M_{ij}\ddot{q}_j+N_i\text{。} \tag{5}$$

然而，这样提出的问题太严格，故常常被推广，即研究给定方程能否间接由变分原理导出，写成等价的 Lagrange 方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=h_{ik}(M_{kj}\ddot{q}_j+N_k)=M'_{ij}\ddot{q}_j+N'_i, \tag{6}$$

式中矩阵乘子满足下列条件:

$$\det(h_{ij})\neq 0\text{。} \tag{7}$$

变分法逆问题常常又称为 Lagrange 力学逆问题。下面主要讨论式(4)形式的二阶常微分方程(组)以及由偶数个一阶常微分方程组成的方程组是否能够表示为 Lagrange 方程的问题。应当指出，这种逆问题是一种多层次的问题: 1) 方程应该满足什么样的条件才能从变分原理导出; 2) 如果存在 Lagrange 函数，如何构造对应的 Lagrange 函数; 3) 同一个方程可能存在多少 Lagrange 函数问题。一百多年来的研究使得问题 1 答案明确，能够直接或间接表示成 Lagrange 方程形式的方程应是自伴随的或者能够变换成为自伴随的，即应满足 Helmholtz 条件，证实存在没有 Lagrange 表示的二阶常微分方程系统。对于问题 2，得到若干普遍的和特殊的构造 Lagrange 函数方法，但是，几种普遍的构造 Lagrange 函数方法的前提是给定的方程应当直接是或者变换成自伴随形式的，而在一般情况下要将微分方程(组)变换成自伴随方程(组)是相当困难的。因此，很多关于逆问题的研究就转向探讨构造 Lagrange 函数的特殊途径，出现若干适用范围不同和难易程度不一的构造 Lagrange 函数方法。问题 3 的结论也很明确，逆问题的解不是唯一的，逆问题与等效的 Lagrange 函数问题密切相关。

然而，在相当长的时期内，变分法逆问题的研究并没有得到较高的关注度和实际应用。近几十年情况有所改变，数学和物理学理论发展的需要，分析力学在其他学科领域中的应用，力学中的非线性非保守系统分析力学化，推动了变分法逆问题的研究，许多传统概念被突破，提出非标准形式的 Lagrange 函数，引入分数阶导数，发展新的方法以构造出多种系统的不同形式的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数。这些成果拓展了 Lagrange 系统的范围，扩大了分析力学理论和方法的应用领域[7−25]。

20 世纪 80 年代末，国内力学和物理学界开始关注变分法逆问题[26−30]。梅凤翔[26]系统地介绍了逆问题的基本理论和方法，启动了国内关于变分法逆问题的研究。20 世纪 90 年代关于非完整系统力学的争论深刻涉及变分原理，利用分析力学理论和方法研究微分方程涉及微分方程的分析力学化，这些都推动了对逆问题的研究。进入 21 世纪后，若干研究者提出新的关于构造二阶和一阶常微分方程(组)的 Lagrange 函数的方法，例如，直接根据运动微分方程的结构特点来构造 Lagrange 函数，利用变量变换构造 Lagrange 函数，直接构造与加速度相关的 Lagrange 函数，或者将二阶微分方程(组)化为一阶微分方程组构造 Lagrange 函数，等等。实际上，关于 Birkhoff 系统动力学的研究中提出的构造 Birkhoff 函数和函数组就是构造一阶常微分方程系统 Lagrange 函数。与此同时，逆问题的理论和方法在数学、力学、物理学和其他领域得到应用[31−54]，相关的内容也进入部分教材和专著[55−60]。

本文无意对国内外关于逆问题的研究给予比较全面的评论，文后收录的参考文献不系统不全面，只简要涉及国内在该问题研究中的若干进展，重点介绍从第一积分构造 Lagrange 函数的新方法及由这种方法得到的结果与等效的 Lagrange 函数的关联，特别是证明等效的 Lagrange 函数族的存在等。为了说明这些成果的理论意义和实用价值，文中给出若干实例。最后，对变分法逆问题的研究提出一些看法和建议。

1　从第一积分直接构造 Lagrange 函数的方法

系统的 Lagrange 函数与其第一积分关系密切，不仅关于对称性和守恒量的理论涉及两者的关联，

逆问题研究中的一些构造 Lagrange 函数方法也与第一积分相关。这里给出的是我们前几年提出的一种新的从第一积分出发的构造 Lagrange 函数方法。首先, 证明 Lagrange 函数与第一积分存在一种与对称性理论无关的新关系, 据此提出一种比较普遍的构造 Lagrange 函数新方法, 说明这种方法的实用性, 证明由此能够导出等价的 Lagrange 函数和函数族。

1.1 第一积分与 Lagrange 函数的新关系和构造 Lagrange 函数的新方法

考虑二阶常微分方程系统

$$\begin{cases} M_{ij}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_j + N_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0, \\ \det(M_{ij}) \neq 0 \quad (i,j=1,2,...,n), \end{cases} \tag{8}$$

将系统(8)变换成如下运动学形式:

$$\ddot{q}_i = Q_i(t,\ \boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})\ 。 \tag{9}$$

设该系统的一个第一积分为

$$I = I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ , \tag{10}$$

在系统真实运动中 I 保持不变:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i}Q_i \equiv 0\ 。 \tag{11}$$

如果第一积分(10)满足下列条件:

$$\det\left(\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0\ , \tag{12}$$

则设 $I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 与函数 L 之间存在以下关系:

$$L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = A(t,\boldsymbol{q})I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + B_i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i + B_0(t,\boldsymbol{q})\ , \tag{13}$$

其中因子 $A(t,\boldsymbol{q})$, $B_i(t,\boldsymbol{q})$和 $B_0(t,\boldsymbol{q})$ 由下列方程确定:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i}I - 2A\frac{\partial I}{\partial q_i} - A\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial B_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_i}{\partial q_j} - \frac{\partial B_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \frac{\partial B_0}{\partial q_i} = 0$$

$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ n), \tag{14}$$

式(13)和方程(14)给出力学系统第一积分和 Lagrange 函数之间的一种新的关系[41], 证明如下。

首先, 证明如果式(13)中 L 是方程(9)的 Lagrange 函数, 则因子 A, B_i 和 B_0 必须满足方程(14)。将式(13)中 L 代入 Lagrange 方程, 沿着系统在位形空间中真实运动展开得到

$$A\left(\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 I}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}Q_j\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_j}\dot{q}_i\right)\frac{\partial I}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial A}{\partial q_i}I - A\frac{\partial I}{\partial q_i} + \frac{\partial B_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_i}{\partial q_j} - \frac{\partial B_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j - \frac{\partial B_0}{\partial q_i} = 0\ 。 \tag{15}$$

由于 I 是第一积分, 满足条件(11), 计算式(11)对 $\dot{q}_i$ 的偏导数得到

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial^2 I}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}Q_j + \frac{\partial I}{\partial q_i} + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} = 0\ 。 \tag{16}$$

由以上两式直接得到方程(14)。

然后, 证明如果式(13)中 L 函数的因子 A, B_i 和 B_0 满足方程(14), 则由对应的 Lagrange 方程必可导出方程(9)。将式(13)中 L 代入 Lagrange 方程, 展开得到式(15), 由于 A, B_i 和 B_0 满足方程(14), 并考虑到式(16), 则由式(15)得到

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}(\ddot{q}_j - Q_j) = 0\ 。 \tag{17}$$

因为 I 满足条件(12), 所以由方程(17)可得方程(9)。换句话说, 这就证明式(13)中函数 L 是系统(8)(或(9))的 Lagrange 函数。

综上所述, 可以提出一种变分法逆问题的新解法[41], 即若要构造微分方程系统(8)的 Lagrange 函数, 可将方程变换成运动学形式(9), 并得到满足条件(12)的第一积分 $I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, 代入方程(14), 解出函数因子 A, B_i 和 B_0, 代入式(13), 即得到 Lagrange 函数。这种变分法逆问题新解法的基础是由式(13)和方程(14)给出的第一积分与 Lagrange 函数的新关系, 这种关系不涉及系统在变量变换下的对称性。换句话说, 这种新解法与对称性理论无关, 对第一积分除了应当满足条件(12)外, 没有其他特别的要求(例如不显含时间)。此外, 这种方法对运动微分方程的结构也没有预先特定的要求, 更不要求将方程变换成为自伴随的, 因此是一种比较普遍的、实用的构造 Lagrange 函数的新方法。

1.2 新方法与等效的 Lagrange 函数

如果对系统(9)某个第一积分 I 方程(14)有解, 则解不是唯一的。当 $A(t,\ \boldsymbol{q})$已确定时, $B_i(t,\ \boldsymbol{q})$和

$B_0(t,\ \boldsymbol{q})$仍然有任意多组解。例如，设 B_i 和 B_0 是一组解时，则下列变换得到的 B_i' 和 B_0' 也是方程(14)的解：

$$B_i \to B_i' = B_i + \frac{\partial G}{\partial q_i},\ B_0 \to B_0' = B_0 + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (18)$$

其中 $G(t,\ \boldsymbol{q})$ 是其宗量的任意连续可微函数。将 B_i' 和 B_0' 代入式(13)就得到一组规范等效的 Lagrange 函数[1−2]:

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t,\ \boldsymbol{q})\text{。} \quad (19)$$

这就是说，新解法求得的应是规范等效的 Lagrange 函数族。可以指出，利用规范变换可以简化方程(14)，方程(14)有 n+2 个待求函数，但是只有 n 个方程，通过规范变换可以减少一个待求函数。以下如果没有特别说明，将不再考虑 Lagrange 函数的规范变换，不考虑规范等效的 Lagrange 函数族。

同样地，新方法与 Lagrange 函数的另一类同位等效函数相关[2−3]。由于式(13)构成的 Lagrange 函数与第一积分 I 的选取相关，取不同的第一积分导出的 Lagrange 函数是不同的，它们之间不是规范等效的，但由它们列出的 Lagrange 方程都与给定的微分方程(8)或(9)等价，因此这些 Lagrange 方程之间是同位等效的。设与第一积分 I 和 I^*对应的 Lagrange 函数分别为 L 和 L^*:

$$\begin{cases} L = A(t,\boldsymbol{q})I + B_i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i + B_0(t,\boldsymbol{q}), \\ L^* = A^*(t,\boldsymbol{q})I^* + B_i^*(t,\boldsymbol{q})\dot{q}_i + B_0^*(t,\boldsymbol{q})\text{。} \end{cases} \quad (20)$$

重复式(17)的推导，可得

$$\begin{cases} E_i(L) = A\dfrac{\partial^2 I}{\partial\dot{q}_j\partial q_i}(\ddot{q}_j - Q_j), \\ E_i(L^*) = A^*\dfrac{\partial^2 I^*}{\partial\dot{q}_j\partial q_i}(\ddot{q}_j - Q_j)\text{。} \end{cases} \quad (21)$$

显然，由式(20)和(21)可得

$$E_i(L^*) = h_{ij}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})E_j(L)\text{。} \quad (22)$$

其中，同位变换矩阵元为

$$h_{ij} = A^*A^{-1}\frac{\partial^2 I^*}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}\left[\frac{\partial^2 I}{\partial\dot{q}_r\partial\dot{q}_s}\right]^{-1}_{kj}, \quad (23)$$

即 L 和 L^*是给定系统的同位等效的 Lagrange 函数。换句话说，这里给出的从第一积分构造 Lagrange 函数的新方法可以直接导出同位等效的 Lagrange 函数。

1.3　一类同位等效的 Lagrange 函数族

在上述同位等效 Lagrange 函数中，可能存在函数族[42,48]。如果对系统(9)的一个积分 I，方程(14)有如下特解:

$$A = A(t),\ B_i = 0,\ B_0 = 0, \quad (24)$$

这里 $A(t)$包括 A 为常数，而对 B_i 和 B_0 不再考虑规范变换解 $\left(B_i = \dfrac{\partial G}{\partial q_j}, B_0 = \dfrac{\partial G}{\partial t}\right)$。将解(24)代入式(13)得到一个 Lagrange 函数:

$$L = A(t)I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\text{。} \quad (25)$$

下面证明，存在一个与 L 同位等效的 Lagrange 函数族

$$\bar{L} = A(t)F(I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})), \quad (26)$$

$F(I)$为 I 的任意连续可微函数。对式(25)中 L，方程(14)写成

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_i} - A\left(2\frac{\partial I}{\partial q_i} + \frac{\partial I}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial Q_j}{\partial\dot{q}_i}\right) = 0, \quad (27)$$

I 是第一积分，$F(I)$也是第一积分，对式(26)中 $\bar{L}$，方程(14)写成

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}I}\left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_i} - A\left(2\frac{\partial I}{\partial q_i} + \frac{\partial I}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial Q_j}{\partial\dot{q}_i}\right)\right] = 0\text{。} \quad (28)$$

显然，式(27)与式(28)等价。

对系统(9)及其第一积分 I，同位等效函数族(26)的存在条件为

$$2\frac{\partial I}{\partial q_i} + \frac{\partial I}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial Q_j}{\partial\dot{q}_i} = f(t)\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (29)$$

式(24)或(25)中因子 $A(t)$由下式确定:

$$A(t) = \exp\left[\int^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\text{。} \quad (30)$$

由条件(29)可得下列推论：若

$$2\frac{\partial I}{\partial q_i} + \frac{\partial I}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial Q_j}{\partial\dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n), \quad (31)$$

则式(25)和(26)中因子 A 为常数。

在文献[27]中，实际上已经导出阻尼运动的 Lagrange 函数族，国外的研究(如文献[22])中也得

到某些系统的 Lagrange 函数族。这里给出的从第一积分直接构造 Lagrange 函数的新方法，不仅能够构造规范等效的和同位等效的 Lagrange 函数，而且能够在一定条件下直接导出一类同位等效 Lagrange 函数族[41−42,48]，表明 Lagrange 函数族的存在并不是孤立的特殊情况，而是一种相当普遍的情况。这是这种新解法带来的一个新的重要结论。

2 从谐振子第一积分构造 Lagrange 函数和函数族

下面以典型的保守系统——谐振子为例，说明前面给出的方法的应用。简谐振动是最基本的运动形式之一，在力学和工程科学领域以及经典物理和量子物理领域中都得到高度的重视，也是变分法及其逆问题研究中非常热门的实例之一。简谐振动运动微分方程

$$\ddot{x}+x=0 \quad (\text{取}\,\omega^2=1) \tag{32}$$

的两个基本第一积分[52]为

$$\begin{cases} I_1 = x\sin t+\dot{x}\cos t, \\ I_2 = x\cos t-\dot{x}\sin t, \end{cases} \tag{33}$$

其他第一积分可由 I_1 和 I_2 构成，如

$$I_3=\frac{1}{2}(I_1{}^2+I_1{}^2)=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+x^2)\,, \tag{34}$$

$$I_4=\arctan\frac{I_1}{I_2}=\arctan\frac{\dot{x}}{x}+t\,, \tag{35}$$

I_1, I_2, I_3 和 I_4 分别与谐振子的初速度、初位置、振幅(总能量)和初位相相关。

I_3 满足条件(12)，将 I_3 和 $Q=-x$ 代入方程(14)，得到方程的一组特解:

$$A=\frac{1}{2},\ B_1=0,\ B_0=-\frac{1}{2}x^2,$$

代入式(13)，就得到众所周知的简谐振动 Lagrange 函数:

$$L_3=\frac{1}{2}(\dot{x}^2-x^2)\,。 \tag{36}$$

应当指出，I_4 虽然也满足条件(12)，但是代入方程(14)后无解。

I_1 不满足条件(12)，然而由 I_1 能够构成新的第一积分:

$$I=F(I_1)=F(x\sin t+\dot{x}\cos t)\,, \tag{37}$$

F 是其宗量的任意连续可微函数。设新积分满足条件(12)，即

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\neq 0\,, \tag{38}$$

将 I 和 Q 代入方程(14)得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}I_1}\cos t-\frac{\partial A}{\partial x}F(I_1)-$$

$$2A\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}I_1}\sin t+\frac{\partial B_1}{\partial t}-\frac{\partial B_0}{\partial x}=0\,。$$

上述方程的一组特解为

$$A=\frac{1}{\cos^2 t}=\sec^2 t\,,\ \ B_1=0\,,\ \ B_0=0\,,$$

代入式(13)得到

$$\bar{L}_1=\sec^2 tF(x\sin t+\dot{x}\cos t)\,, \tag{39}$$

由于 F 是任意函数，故 $\bar{L}_1$ 是一个 Lagrange 函数族。

类似地，由 I_2 构成新的第一积分:

$$I'=F(I_2)=F(x\cos t-\dot{x}\sin t)\quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\neq 0\right), \tag{40}$$

可以得到另一个 Lagrange 函数族:

$$\bar{L}_2=\csc^2 tF(x\cos t-\dot{x}\sin t)\,。 \tag{41}$$

$\bar{L}_1$ 和 $\bar{L}_2$ 可以直接导出，例如对 I_2 满足判别条件(29)，并且

$$f(t)=-2\cot t\,,$$

代入式(30)得到

$$A(t)=\frac{1}{\sin^2 t}=\csc^2 t\,, \tag{42}$$

由此即得函数族 $\bar{L}_2$。

3 方程 $\ddot{x}+b(x)\dot{x}^2+c(x)x=0$ 的分析力学化

研究变系数非线性非保守动力学系统[16,20]:

$$\ddot{x}+b(x)\dot{x}^2+c(x)x=0\,。 \tag{43}$$

引入变数变换，将方程(43)写成两个一阶方程:

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}+b(x)y^2+c(x)x=0\text{。}\end{cases}\tag{44}$$

消除时间变量 t, 导出一阶微分方程:

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+b(x)y^2+c(x)x=0\,,$$

利用积分因子法, 可得到上述一阶微分方程的积分:

$$I=\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{2I_b(x)}+\int_{x_0}^{x}\overline{x}c(\overline{x})\mathrm{e}^{2I_b(\overline{x})}\mathrm{d}\overline{x}\,,$$

变换为原来变数, 即得到方程(43)的一个第一积分:

$$I=\frac{1}{2}\dot{x}^2\mathrm{e}^{2I_b(x)}+\int_{x_0}^{x}\overline{x}c(\overline{x})\mathrm{e}^{2I_b(\overline{x})}\mathrm{d}\overline{x}\,,\tag{45}$$

式中,

$$I_b(x)=\int_{x_0}^{x}b(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x}\text{。}\tag{46}$$

将式(45)第一积分代入式(14), 得到

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x}\right)\dot{x}\mathrm{e}^{2I_b(x)}-\frac{\partial A}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2\mathrm{e}^{2I_b(x)}+\int_{x_0}^{x}\overline{x}c(\overline{x})\mathrm{e}^{2I_b(\overline{x})}\mathrm{d}\overline{x}\right]-2A[b(x)\dot{x}^2+c(x)x]\mathrm{e}^{2I_b(x)}+2Ab(x)\dot{x}^2\mathrm{e}^{2I_b(x)}-\frac{\partial B}{\partial x}=0\text{。}$$

上述方程的一个解是

$$\begin{cases}A=1,\\ B=-2\int_{x_0}^{x}\overline{x}c(\overline{x})\mathrm{e}^{2I_b(\overline{x})}\mathrm{d}\overline{x}\text{。}\end{cases}\tag{47}$$

将积分 I 和 A,B 代入式(13), 得到式(43)的 Lagrange 函数为

$$L(\dot{x},x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2\mathrm{e}^{2I_b(x)}-\int_{x_0}^{x}\overline{x}c(\overline{x})\,\mathrm{e}^{2I_b(\overline{x})}\mathrm{d}\overline{x}\,,\tag{48}$$

式(48)中函数 $L(\dot{x},x)$ 可以看做是标准形式的, 即为“动能”与“势能”之差。容易导出对应的 Hamilton 函数为

$$H(\dot{x},x)=\frac{1}{2}p^2\mathrm{e}^{-2I_b(x)}+\int_{x_0}^{x}\overline{x}c(\overline{x})\,\mathrm{e}^{2I_b(\overline{x})}\mathrm{d}\overline{x}$$

$$(p=\dot{x}\mathrm{e}^{2I_b(x)})\text{。}\tag{49}$$

导出 Lagrange 函数(48)和 Hamilton 函数(49)后, 发现像方程(43)这样的变系数非线性非保守动力学系统却是一个“守恒”的系统, 系统的“广义能量”(Hamilton 函数)在运动中保持不变。

4　若干非保守非线性系统的 Lagrange 函数和函数族

例 1　广义相对论中的 Buchduhl 方程[22,42]:

$$\ddot{x}=\frac{3}{x}\dot{x}^2+\frac{\dot{x}}{t}\text{。}\tag{50}$$

Buchduhl 方程的两个第一积分为

$$I_1=\frac{\dot{x}}{tx^3}\,,\tag{51}$$

$$I_2=\frac{\dot{x}t}{x^3}+\frac{1}{x^2}\text{。}\tag{52}$$

引入积分 I_1 的满足条件(12)的任意函数 $F(I_1)$, 代入方程(14)得到

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}I_1}\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}-\frac{\boldsymbol{A}}{t}\right]\frac{1}{tx^3}=0\,,$$

解得 $A=t$, 由此得到 Buchduhl 方程的一个 Lagrange 函数族:

$$\overline{L}=tF(t^{-1}x^{-3}\dot{x})\quad\left(\frac{\partial F^2}{\partial\dot{x}^2}\neq0\right)\text{。}\tag{53}$$

实际上, I_1 满足条件(29), 即

$$2\frac{\partial I_1}{\partial\dot{x}}+\frac{\partial I_1}{\partial\dot{x}}\frac{\partial Q}{\dot{x}}=\frac{1}{t^2x^3}=\frac{1}{t}\frac{\partial I_1}{\partial\dot{x}}\,,$$

由式(30)得 $A=t$, 直接得到 Lagrange 函数族(53)。

同样, I_2 也满足条件(29), 故可以导出另一个 Lagrange 函数族为

$$\overline{L}_2=\frac{1}{t^3}F\left(\frac{\dot{x}t}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)\quad\left(\frac{\partial F^2}{\partial\dot{x}^2}\neq0\right)\text{。}\tag{54}$$

上述结果比文献[22]得到的结果更为普遍, 后者只是前者的特例。

例 2　二维非线性变系数阻尼运动的 Lagrange 函数族[3,41−42]。

以上讨论的系统都是一维的, 下面以二维非线性变系数阻尼运动为例, 讨论多维情况。设系统运动方程为

$$\begin{cases}\ddot{q}_1 = Q_1 = -\dfrac{\gamma}{m}(q_1\dot{q}_1{}^2 + 2q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1\dot{q}_2{}^2),\\ \ddot{q}_2 = Q_2 = -\dfrac{\gamma}{m}(q_2\dot{q}_2{}^2 + 2q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1{}^2)\text{。}\end{cases} \tag{55}$$

方程的一个第一积分为

$$I = \log(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2) + \frac{\gamma}{m}(q_1{}^2 + q_2{}^2)\text{,} \tag{56}$$

将 I 和 Q_1, Q_2 代入判别条件(31)，得

$$\begin{cases}2\dfrac{\partial I}{\partial q_1} + \dfrac{\partial I}{\partial \dot{q}_1}\dfrac{\partial Q_1}{\partial \dot{q}_1} + \dfrac{\partial I}{\partial \dot{q}_2}\dfrac{\partial Q_2}{\partial \dot{q}_1} = 0,\\ 2\dfrac{\partial I}{\partial q_2} + \dfrac{\partial I}{\partial \dot{q}_1}\dfrac{\partial Q_1}{\partial \dot{q}_2} + \dfrac{\partial I}{\partial \dot{q}_2}\dfrac{\partial Q_2}{\partial \dot{q}_2} = 0,\end{cases} \tag{57}$$

因此系统存在 Lagrange 函数族:

$$\bar{L} = F\left[\log(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2) + \frac{\gamma}{m}(q_1{}^2 + q_2{}^2)\right], \tag{58}$$

上式取常数因子 $A = 1$ 。文献[3]中只给出系统(55)的一个 Lagrange 函数:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2)\exp\left[\frac{\gamma}{m}(q_1{}^2 + q_2{}^2)\right], \tag{59}$$

显然，这个 L 只是 $\bar{L}$ 中一个特定函数。

5 结论与讨论

本文概要地回顾变分法逆问题的内容及国内外的研究简况，主要给出国内近年来提出的变分法逆问题的一种新解法以及与之相关的结果。这种解法基于力学系统第一积分与其 Lagrange 函数之间存在一种新关系，通过对一系列典型的线性和非线性微分方程系统的应用，说明这种方法的理论意义和应用价值。这是一种比较普遍的求解变分法逆问题的方法，可以应用于系统，构造得到多种不同形式的 Lagrange 函数。利用这种方法无需首先将运动方程变换成为自伴随形式的，也无需先行假设 Lagrange 函数的特殊形式。利用这种方法可直接得到等价的 Lagrange 函数，特别是同位等价的 Lagrange 函数，并且在一定条件下能够导出等价的 Lagrange 函数族。

变分法逆问题是一种基础理论研究，有较长的研究历史，得到的结果不仅对数学和力学领域，而且对理论物理等传统学科都有重要的意义。从近几十年情况来看，虽然国外在这个领域的研究者并不多，但是这些研究者中，有从事传统的理论物理(如粒子物理和天体物理)研究的学者，也有从事新型交叉学科的学者，这是值得重视的现象。与之相比，国内从事这个领域研究的队伍太小，传统物理学科与交叉学科的学者很少进入该领域。然而，逆问题研究不仅在数学和力学领域，而且在物理学领域都需要继续深入。例如，关于 Lagrange 函数族仍然有待深入研究；变分法逆问题如何从有限自由度的离散系统推广到无限自由度的连续系统，即如何推广到场论；力学系统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的多值性对系统的量子化有怎样的影响；等等。

目前对各种系统的研究常常是跨学科的研究，涉及数学、力学、物理学、化学、地球科学、生命科学和医学、工程科学、经济学以及社会科学等，这种研究不仅有重大的理论意义，而且有重要的应用价值。通过建立系统的数学模型(主要是微分方程模型)来理解和掌握系统的行为特性和演化发展，已经成为当今众多学科领域中的热点方法。值得指出的是，在这种研究中，分析力学的理论和方法有着重要的应用，这种应用需要实现微分方程系统的分析力学化，主要方式是构造对应的 Lagrange 函数以及 Hamilton 函数，显而易见，这与变分法逆问题密切相关。

综上所述，变分法逆问题的研究是基础理论研究，应当加强。基础理论研究是知识创新的源头，科学史表明，逆问题的研究常常带来突破，因此不能忽视变分法逆问题的研究。这个领域的研究队伍不需要庞大，但必须有一定的数量，分析力学学者应当是主力，但必须有多学科协作，科研管理部门对这样的研究应当给予支持。

参考文献

[1] 陈滨. 分析动力学. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2012

[2] Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅰ. New York: Springer-Verlag, 1978

[3] Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅱ. New York: Springer-Verlag, 1983

[4] Anderson I M, Thompson G. The inverse problem of the calculus of variations for ordinary differential equations. Mem Amer Math Soc, 1992, 98: No.473

[5] Lopuszanski J. The inverse varitional problem in classical mechanics. Singapore: World Scientific, 1999

[6] Saunders D J. Thirty years of the inverse problem in

the calculus of variations. Reports on Mathematical Physics, 2010, 66: 43–53

[7] Currie D F, Saletan E J. Q-equivalent particle Hamiltonians 1. The classical one-dimensional case. J Math Phys, 1966, 7: 967–974

[8] Sarlet W. Symmetries, first integrals and the inverse problem of Lagrangian mechanics. J Phys A: Math Gen, 1981, 14: 2227–2238

[9] Hojman S, Urrutia L F. On the inverse problem of the calculus of variations. J Math Phys, 1981, 22: 1896–1903

[10] Hojman S, Harleston H. Equivalent Lagrangians: multidimensional case. J Math Phys, 1981, 22: 1414–1419

[11] Sarlet W. The Holmholtz conditions revisited: a new approach to the inverse problem of Lagrangian dynamics. J Phys A: Math Gen, 1982, 15: 1503–1517

[12] Lopėz G. Hamiltonian and Lagrangian for *n*-dimensional autonomous systems. Ann Phys, 1996, 251: 363–371

[13] Lopėz G. One-dimensional autonomous systems and dissipative systems. Ann Phys, 1996, 251: 372–383

[14] Riewe F. Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics. Phys Rev, 1996, E53: 1890–1899

[15] Riewe F. Mechanics with fractional derivatives. Phys Rev, 1997, E55: 3581–3592

[16] Chandrasekar V K, Pandey S N, Senthilvelan M, et al. A simple and unified approach to identify integrable nonlinear oscillators and systems. J Math Phys, 2006, 47: 023508

[17] Chandrasekar V K, Senthilvelan M, Lakshmanan M. On the Lagrangian and Hamiltonian description of the damped harmonic oscillator. J Math Phys, 2007, 48: 032701

[18] Nucci M C, Leach P G L. Lagrangians galore. J Math Phys, 2007, 48: 123510

[19] Musielak Z E. Standard and non-standard Lagrangians for disspative dynamical systems with variable coefficient. J Phys A: Math Theor, 2008, 41: 055205

[20] Musielak Z E, Roy D, Swift L D. Method to derive Lagrangian and Hamiltonian for a nonlinear dynamical system with variable coefficients. Chaos, Solitons and Fractols, 2008, 38: 894–902

[21] Pradeep R G, Chandrasekar V K, Senthilvelan M, et al. Non-standard conserved Hamiltonian structures in dissipative/damped systems: nonlinear generalizations of damped harmonic oscillator. J Math Phys, 2009, 50: 052901

[22] Cieslinski J L, Nikiciuk T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangian for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients. J Phys A: Math Theor, 2010, 43: 175205

[23] Nucci M C, Tamizhmani K M. Lagrangians for dissipative nonlinear oscillators: the method of Jacobi last multiplier. J Nonlinear Math Phys, 2010, 17: 167–178

[24] Saha A, Talukdar B. Inverse variational problem for non-standard Lagrangians. Reports on Mathematical Physics, 2014, 73: 299–309

[25] Hojman S. Construction of Lagrangian and Hamiltonian structrures starting from one constant of motion. Acta Mech, 2015, 226: 735–744

[26] 梅凤翔. 分析力学专题. 北京: 北京工业学院出版社, 1988

[27] 丁光涛. 处理阻尼运动的分析力学方法. 黄淮学刊, 1991, 7(2): 7–10

[28] 张耀良, 刘锡录. 关于 Lagrange 力学逆问题的探讨. 哈尔滨船舶工程学院学报, 1993, 14: 102–110

[29] 梁立孚, 石志飞. 关于变分学中逆问题的研究. 应用数学和力学, 1994, 15(9): 775–788

[30] 丁光涛. 一种构造 Lagrange 函数的直接方法. 安徽师范大学学报: 自然科学版, 1996, 19(4): 382–386

[31] 葛伟宽, 梅凤翔. 作战微分方程模型的 Noether 对称性. 兵工学报, 2001, 22(2): 241–243

[32] 梅凤翔, 解加芳, 江铁强. 求 Emden-Fouler 方程积分的分析力学方法. 物理学报, 2007, 56(9): 5041–5044

[33] Mei F X, Xie J F, Gang T Q. Analytical mechanics methods for solving Whitaker equations. Chinese Physics, 2007, 16(10): 2845–2847

[34] 丁光涛, 陶松涛. 一阶 Lagrange 力学逆问题及其在非力学领域中的应用, 科学通报, 2008, 53(8): 872–876

[35] 丁光涛. 两种构造 Birkhoff 表示的新方法. 物理学报, 2008, 57(12): 7415–7418

[36] 丁光涛. 阻尼谐振子的拉格朗日函数和哈密尔顿函数. 大学物理, 2009, 28(3): 13–14

[37] 丁光涛. 研究经济调整微分方程的 Lagrange-Noether 方法. 安徽师范大学学报: 自然科学版, 2009, 32(4): 328–330

[38] 丁光涛. 经典力学中加速度相关的 Lagrange 函数.

物理学报, 2009, 58(6): 3620−3624

[39] 丁光涛. 计算加速度相关 Lagrange 函数的方法物理学报, 2009, 58(10): 6725−6728

[40] 丁光涛. 从运动方程构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报, 2010, 8(4): 305−310

[41] 丁光涛. 从第一积分构造 Lagrange 函数的直接方法. 动力学与控制学报, 2011, 9(2): 102−106

[42] 丁光涛. 关于一类 Lagrange 函数族的存在条件. 动力学与控制学报, 2011, 9(3): 219−221

[43] 丁光涛. 一维变系数耗散系统 Lagrange 函数和 Hamilton 函数的新构造方法. 物理学报, 2011, 60(4): 44503

[44] 李宽国, 刘广菊, 陶松涛, 等. 研究 SIR 传染病数学模型 Lagrange-Noether 方法. 生物数学学报, 2011, 26(3): 435−440

[45] 丁光涛. 磁场中带电粒子阻尼运动的分析力学表示. 物理学报, 2012, 61(2): 020204

[46] 丁光涛. 一类 Painleve 方程的 Lagrange 函数族. 物理学报, 2012, 61(11): 110202

[47] 丁光涛. 一阶系统自伴随条件和 Lagrange 函数的构造. 动力学与控制学报, 2012, 10(1): 1−4

[48] 丁光涛. Lagrange 函数族及其存在条件的再研究. 动力学与控制学报, 2012, 10(2): 127−129

[49] 丁光涛. 利用变量变换构造耗散系统 Lagrange 函数. 动力学与控制学报, 2012, 10(3): 199−201

[50] 甘慧兰, 丁光涛, 郑贤锋, 等. 线性三原子分子振动的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数. 原子与分子物理学报, 2012, 29(1): 7−11

[51] 丁光涛, 甘慧兰, 郑贤锋, 等. 阻尼耦合振动的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数. 原子与分子物理学报, 2012, 29(2): 350−352

[52] 丁光涛. 关于谐振子第一积分的研究. 物理学报, 2013, 62(6): 064502

[53] 丁光涛. 三种耦合 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数. 动力学与控制学报, 2014, 12(4): 304−308

[54] 丁光涛. 阻尼运动的动力学逆问题和变分法逆问题. 动力学与控制学报, 2015, 13(1): 68−71

[55] 梅凤翔, 吴惠彬. 微分方程的分析力学方法. 北京: 科学出版社, 2012

[56] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 等. Birkhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1996

[57] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社, 2004

[58] 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学. 北京: 科学出版社, 2013

[59] 梅凤翔. 分析力学(下册). 北京: 北京理工大学出版社, 2013

[60] 丁光涛. 理论力学. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014