

几何精确梁的 Hamel 场变分积分分子

王亮 安志朋 史东华[†]

北京理工大学数学与统计学院, 北京 100081; [†]通信作者, E-mail: dshi@bit.edu.cn

摘要 利用场论下的 Hamel 形式, 对几何精确梁提出一种保结构的变分积分分子, 并通过数值仿真说明该算法保持能量、动量和几何结构的特性。

关键词 几何精确梁; Hamel 场变分积分分子; 保结构

中图分类号 O302; O33; O242

Hamel's Field Variational Integrator of Geometrically Exact Beam

WANG Liang, AN Zhipeng, SHI Donghua[†]

School of Mathematic and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081;

[†] Corresponding author, E-mail: dshi@bit.edu.cn

Abstract This paper develops a structure-preserving variational integrator for geometrically exact beam in Hamel's field formalism. A simulation illustrates that the derived algorithm preserves energy, momentum and geometry structure.

Key words geometrically exact beam; Hamel's field variational integrator; structure-preserving

几何精确梁的动力学广泛存在于大范围运动的力学系统中, 例如, 可应用于柔性机器人^[1], 使之可以做大量复杂的变形, 从而完成更多具有挑战性的工作; 也可用于聚合物长链的动力学模拟, 在研究 DNA 的动力学^[2]中发挥重要作用。对于几何精确梁的模型, Reissner^[3]首先提出大范围运动的应变梁模型, Antman 等^[4-5]在此基础上进行完善, 得到经典的 Kirchhoff-Love 模型。Simo 等^[6]在上述模型的基础上考虑剪切变形, 使之广泛适用于梁的大位移和大转动的运动情形。

在几何精确梁的数值模拟算法研究方面, 传统方法是直接对运动方程进行离散, 这类方法大都不能保持系统的力学和几何结构, 存在数值耗散问题, 不适用于长时间的运动模拟^[7]。Marsden 等^[8]基于经典力学中 Hamilton 原理的离散形式, 提出的变分积分分子在一定程度上可以克服上述缺陷。Lew 等^[9]

指出, 变分积分分子能够较好地保持系统的几何结构, 避免传统离散方法的数值耗散问题。对于几何精确梁, Demoures 等^[10]提出李群和李代数变分积分分子, 得到保持能量和动量的几何算法, 但该算法对空间和时间分别离散, 没有充分利用势能的欧式群不变性进行约化, 实现过程较复杂。Ball 等^[11]对有限维系统提出 Hamel 变分积分分子, 其框架可统一描述李群及李代数变分积分分子, 尤其适用于带对称性的非完整约束力学系统。Shi 等^[12]将其在场论框架下推广, 得到 Hamel 场变分积分分子。本文将应用于几何精确梁, 得到一种新的保结构算法。

本文在回顾几何精确梁模型后, 重新推导几何精确梁的 Hamel 场方程, 进而用 Hamel 场变分积分分子得到几何精确梁的离散运动方程。最后给出实例, 说明该算法能长时间保持能量、动量和几何结构的特点。

1 几何精确梁的动力学

1.1 几何精确梁的 Lagrange 函数

首先回顾几何精确梁的动力学模型^[13]。

取定物质标架的一组固定基 $\{E_1, E_2, E_3\}$, 初始时梁位于 (E_2, E_3) 平面上。设梁长为 l , 密度为 ρ , 截面 \mathcal{A} 为面积为 A 的正方形。

因几何精确梁的截面做刚体运动, 其位形由中线的位形函数

$$\phi = (S+u, w, z): [0, l] \rightarrow \mathbf{R}^3$$

和截面的旋转矩阵

$$A: [0, l] \rightarrow \text{SO}(3)$$

给出。

考虑主丛 (E, B, π_{BE}) , 其中

$$E = B \times \text{SE}(3), \quad B = \mathbf{R} \times [0, l],$$

π_{BE} 为丛投影。梁的位形空间为上述丛光滑截面的全体 $C^\infty(\pi_{BE})$ 。下文为方便起见, 记

$$g = \begin{pmatrix} A & \phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^\infty(\pi_{BE}),$$

并不加声明地利用映射

$$\begin{pmatrix} \hat{\omega} & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \omega \\ \gamma \end{pmatrix}$$

建立同构

$$\mathfrak{se}(3) \cong \mathbf{R}^6.$$

此处 $\omega, \gamma \in \mathbf{R}^3$, 对于 $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)^T$,

$$\hat{\omega} := \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{se}(3).$$

引入对流速度

$$\xi^t = g^{-1} \dot{g} = (\omega, \gamma)^T, \quad (1)$$

以及对流应变变量

$$\xi^s = g^{-1} g' - e_2 = (\Omega, \Gamma)^T, \quad (2)$$

其中, $e_2 = (0, E_2)^T$, “ \cdot ”和“ $'$ ”分别表示对时间和空间变量求导。

几何精确梁适用于大范围运动的一个主要原因

在于其 Lagrange 函数具有欧式群作用不变性, 故可表示为

$$l(\xi^t, \xi^s) = \int_0^l \frac{1}{2} [\langle D_1 \xi^t, \xi^t \rangle - \langle D_2 \xi^s, \xi^s \rangle] dS,$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 L^2 配对,

$$D_1 = \text{diag}(J, M), \quad D_2 = \text{diag}(C_1, C_2),$$

其中

$$C_1 = \text{diag}(EI, GI_2, EI),$$

$$C_2 = \text{diag}(GA, EA, GA).$$

J 为惯性矩阵

$$J = - \int_{\mathcal{A}} \rho \left(\overline{\zeta^1 E_1 + \zeta^3 E_3} \right)^2 d\zeta^1 d\zeta^3,$$

$M = \rho A I_3$, I_3 为 3 阶单位矩阵, I 为截面的主惯性矩, $I_2 = 2I$ 为截面的极惯性矩, E 为杨氏模量, $G = E / [2(1+\nu)]$ 为剪切模量, ν 是泊松比。

1.2 几何精确梁的 Hamel 场方程

据上述 Lagrange 函数, 可以定义作用泛函为

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{1}{2} [\langle D_1 \xi^t, \xi^t \rangle - \langle D_2 \xi^s, \xi^s \rangle] dS dt.$$

此外, 通过计算易得下列变分公式:

$$\delta \xi^t = \dot{\eta} + [\xi^t, \eta],$$

$$\delta \xi^s = \eta' + [\xi^s + e_2, \eta].$$

其中, $\eta = g^{-1} \delta g$, $[\cdot, \cdot]$ 为 $\mathfrak{se}(3)$ 的李括号^①:

$$\left[\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \omega_1 \times \omega_2 \\ \omega_1 \times \gamma_2 - \omega_2 \times \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

由上述变分公式和 Hamilton 原理, 容易计算得到梁的 Hamel 场方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} D_1 \xi^t - \frac{\partial}{\partial S} D_2 \xi^s - [\xi^t, D_1 \xi^t]^* + [\xi^s + e_2, D_2 \xi^s]^* = 0, \quad (3)$$

边界条件为

$$D_2 \xi^s|_{S=0} = 0, \quad D_2 \xi^s|_{S=l} = 0, \quad (4)$$

其中 $[\cdot, \cdot]^*$ 为 $\mathfrak{se}(3)$ 的李括号 $[\cdot, \cdot]$ 的对偶括号。由计算知:

① 在 Hamel 场论标架下, 易验证若取 $\mathcal{W}_g(\xi^t, \xi^s) = (\dot{g}, g')$, 则 $[\cdot, \cdot]_g$ 为 $\mathfrak{se}(3)$ 的李括号, 详见文献[14]。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \Bigg]^* = - \begin{pmatrix} u_1 \times u_2 + v_1 \times v_2 \\ u_1 \times v_2 \end{pmatrix}.$$

从式(1)和(2)求解 g 需要如下相容性条件:

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi^s - \frac{\partial}{\partial s} \xi^t = [\xi^s + e_2, \xi^t].$$

这可以从式(1)和(2)出发, 直接计算验证。相容性条件是由 ξ^t 和 ξ^s 生成的分布决定位形的可积性条件, 在几何上可解释为局部平坦性条件, 对于一般性的相容性条件参见文献[14]。

求解 ξ^t 和 ξ^s 需联立方程组(3)和(4)及上述相容性条件。

2 几何精确梁的 Hamel 场变分积分分子

设梁的空间节点数为 K , 空间步长为 Δh , 时间步长为 Δt , 时间步数为 N 。

为方便起见, 以下对于序列 $\{q_{i,j}\}$, 令

$$q_{i+1/2,j} := \frac{1}{2}(q_{i,j} + q_{i+1,j}), 1 \leq j \leq K,$$

$$q_{i,j+1/2} := \frac{1}{2}(q_{i,j} + q_{i,j+1}), 0 \leq j \leq K,$$

其中 $0 \leq i \leq N-1$ 。定义梁的离散 Lagrange 函数为

$$l^d = l^d(\xi_{i+1/2,j}^t, \xi_{i,j+1/2}^s) = \Delta t \Delta h l(\xi_{i+1/2,j}^t, \xi_{i,j+1/2}^s),$$

相应的作用量为

$$s^d = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^K l^d(\xi_{i+1/2,j}^t, \xi_{i,j+1/2}^s).$$

利用离散变分原理易得如下结论: 序列

$$\{\xi_{i+1/2,j}^t, \xi_{i,j+1/2}^s \mid 0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq K\}$$

满足离散变分原理^①

$$\delta s^d = \delta \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^K l^d(\xi_{i+1/2,j}^t, \xi_{i,j+1/2}^s) = 0,$$

其中, $\xi_{i+1/2,j}^t$ 和 $\xi_{i,j+1/2}^s$ 的变分为

$$\delta \xi_{i+1/2,j}^t = \frac{1}{\Delta t} (\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j}) + [\xi_{i+1/2,j}^t, \eta_{i+1/2,j}],$$

$$\delta \xi_{i,j+1/2}^s = \frac{1}{\Delta h} (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j}) + [\xi_{i,j+1/2}^s + e_2, \eta_{i,j+1/2}],$$

当且仅当序列 $\{\xi_{i+1/2,j}^t, \xi_{i,j+1/2}^s \mid 0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq K\}$ 满足离散 Hamel 场方程

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} D_1(\xi_{i+1/2,j}^t - \xi_{i-1/2,j}^t) - \frac{1}{\Delta h} D_2(\xi_{i,j+1/2}^s - \xi_{i,j-1/2}^s) - \\ & \frac{1}{2} [\xi_{i+1/2,j}^t, D_1 \xi_{i+1/2,j}^t]^* - \frac{1}{2} [\xi_{i-1/2,j}^t, D_1 \xi_{i-1/2,j}^t]^* + \\ & \frac{1}{2} [\xi_{i,j+1/2}^s + e_2, D_2 \xi_{i,j+1/2}^s]^* + \frac{1}{2} [\xi_{i,j-1/2}^s + e_2, D_2 \xi_{i,j-1/2}^s]^* \\ & = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

及以下离散的相容性条件

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\xi_{i+1,j+1/2}^s - \xi_{i,j+1/2}^s) - \frac{1}{\Delta h} (\xi_{i+1/2,j+1}^t - \xi_{i+1/2,j}^t) \\ & = \left[\frac{1}{2} (\xi_{i+1,j+1/2}^s + \xi_{i,j+1/2}^s + 2e_2), \frac{1}{2} (\xi_{i+1/2,j+1}^t + \xi_{i+1/2,j}^t) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

边界条件为

$$D_2 \xi_{i,1/2}^s = 0, \quad D_2 \xi_{i,K+1/2}^s = 0.$$

用 $\mathfrak{se}(3)$ 的 Lie 括号及其对偶定义, 可直接验证式(5)及(6)中的带括号项为

$$\begin{aligned} & [\xi_{i+1/2,j}^t, D_1 \xi_{i+1/2,j}^t]^* = - \begin{pmatrix} \omega_{i+1/2,j} \times J \gamma_{i+1/2,j} \\ \omega_{i+1/2,j} \times M \gamma_{i+1/2,j} \end{pmatrix}, \\ & [\xi_{i,j+1/2}^s + e_2, D_2 \xi_{i,j+1/2}^s]^* \\ & = - \begin{pmatrix} \Omega_{i,j+1/2} \times C_1 \Omega_{i,j+1/2} + (\Gamma_{i,j+1/2} + E_2) \times C_2 \Gamma_{i,j+1/2} \\ \Omega_{i,j+1/2} \times C_2 \Gamma_{i,j+1/2} \end{pmatrix}, \\ & \left[\frac{1}{2} (\xi_{i+1,j+1/2}^s + \xi_{i,j+1/2}^s + 2e_2), \frac{1}{2} (\xi_{i+1/2,j+1}^t + \xi_{i+1/2,j}^t) \right] \\ & = \frac{1}{4} \left((\Omega_{i+1,j+1/2} + \Omega_{i,j+1/2}) \times (\omega_{i+1/2,j+1} + \omega_{i+1/2,j}) \right) - \\ & \quad \left((\Omega_{i+1,j+1/2} + \Omega_{i,j+1/2}) \times (\gamma_{i+1/2,j+1} + \gamma_{i+1/2,j}) \right) - \\ & \quad \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_{i+1/2,j+1} + \omega_{i+1/2,j}) \times (\Gamma_{i+1,j+1/2} + \Gamma_{i,j+1/2} + 2E_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

① 对适用于一般 Lagrange 场论的离散 Hamel 场方程, 参见文献[12]。

该离散格式的实现步骤如下:

1) 给定 i , 输入序列

$$\{\xi_{i,j+1/2}^s \mid 0 \leq j \leq K\}$$

和

$$\{\xi_{i-1/2,j}^t \mid 1 \leq j \leq K\},$$

并代入离散格式(5)中, 通过修正的牛顿迭代法求解非线性方程组, 更新序列

$$\{\xi_{i+1/2,j}^t \mid 1 \leq j \leq K\}。$$

2) 将所得的序列

$$\{\xi_{i+1/2,j}^t \mid 1 \leq j \leq K\}$$

和

$$\{\xi_{i,j+1/2}^s \mid 0 \leq j \leq K\},$$

代入离散格式(6)中, 求解线性方程组, 更新序列

$$\{\xi_{i+1,j+1/2}^s \mid 0 \leq j \leq K\}。$$

3) 重复步骤 1 和 2, 可得到所有节点处的值。

4) 根据序列

$$\{\xi_{i+1/2,j}^t \mid 0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq K\},$$

并利用指数映射

$$\text{Exp}: \mathfrak{se}(3) \rightarrow \text{SE}(3)$$

及公式

$$g_{i+1,j} = g_{i,j} \text{Exp}(\Delta t \xi_{i+1/2,j}^t), \quad (7)$$

迭代可得到

$$\{g_{i+1,j} \mid 0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq K\}。$$

由几何精确梁的离散格式及离散的 Noether 定理^[8]可以验证, 上述算法保持如下定义的离散动量:

$$J_{i-1/2} = \sum_{j=1}^K \Delta h A d_{g_{i-1/2,j}}^* (D_1 \xi_{i-1/2,j}^t) = \sum_{j=1}^K \Delta h \begin{pmatrix} a_{i-1/2,j} \\ b_{i-1/2,j} \end{pmatrix},$$

其中,

$$A d_{(\Lambda, \phi)^{-1}}^*(u, v) = (\Lambda u + \phi \times \Lambda v, \Lambda v),$$

$$a_{i-1/2,j} = \Lambda_{i-1/2,j} J \omega_{i-1/2,j} + \phi_{i-1/2,j} \times \Lambda_{i-1/2,j} M \gamma_{i-1/2,j},$$

$$b_{i-1/2,j} = \Lambda_{i-1/2,j} M \gamma_{i-1/2,j}, \quad 1 \leq i \leq N。$$

3 数值仿真

考虑初始位置如图 1 所示的不受外力的几何精确梁。其参数^[15]如下: 梁 $l=2\pi/3$, 横截面是边长为 $a=0.1$ 的正方形, 密度 $\rho=1000$, 杨氏模量 $E=10^7$, 泊松比 $\nu=0.35$ 。

取时间步长为 $\Delta t=10^{-4}$ s, 空间节点数 $K=101$ 。根据上述的初始位形, 计算得到初始的对流应变变量为

$$\Gamma_1 = -1, \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0,$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0,$$

且给定梁的初速度为

$$\gamma_1 = \sin(\pi S / \ell), \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0,$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0。$$

为了提高计算速度, 本文使用指数映射的近似映射——Cayley 变换^[16], 即用下式取代式(7)

$$g_{i+1,j} = g_{i,j} \text{cay}(\Delta t \xi_{i+1/2,j}^t) =$$

$$g_{i,j} (I_4 - \Delta t \xi_{i+1/2,j}^t / 2)^{-1} (I_4 + \Delta t \xi_{i+1/2,j}^t / 2), \quad (7')$$

这里 I_4 表示 4 阶单位矩阵。

从图 2 可见, Hamel 场变分积分分子虽不能精确地保持能量, 但可使能量长时间稳定在一个很小区间内。本例能量取值为 99, 振幅区间长度仅为 0.7, 说明该数值格式有好的长时间能量表现。

几何精确梁的角动量和线动量如图 3 所示, 说

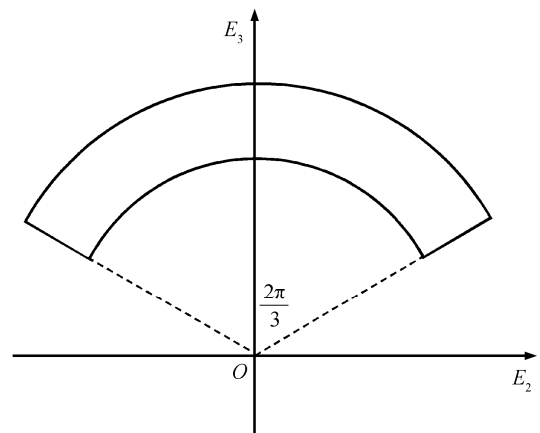


图 1 梁的初始状态示意图

Fig. 1 Schematic of the deformation of beam

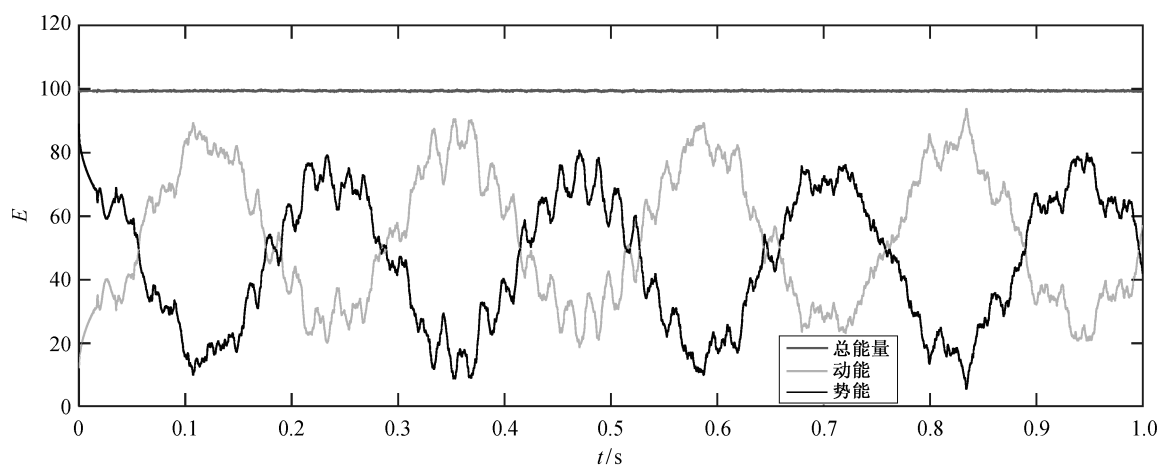


图 2 梁的动能、势能和总能量

Fig. 2 Evolution of kinetic energy, potential energy and total energy

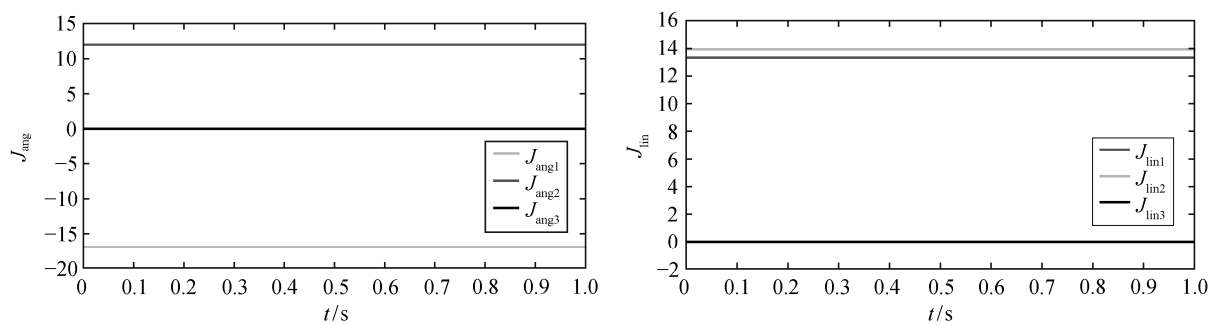


图 3 梁的角动量和线动量

Fig. 3 Evolution of angular momentum and linear momentum

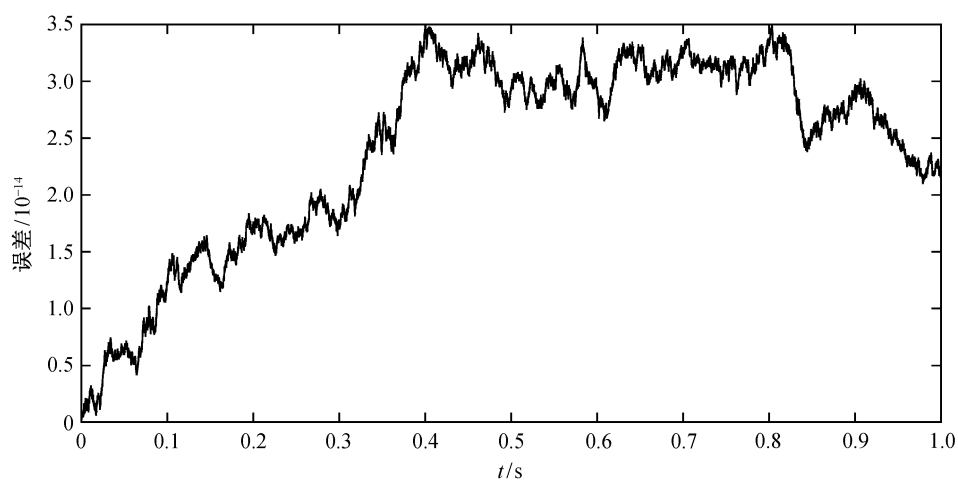


图 4 $\|A_{i,j}(A_{i,j})^T - I_3\|$

Fig. 4 $\|A_{i,j}(A_{i,j})^T - I_3\|$

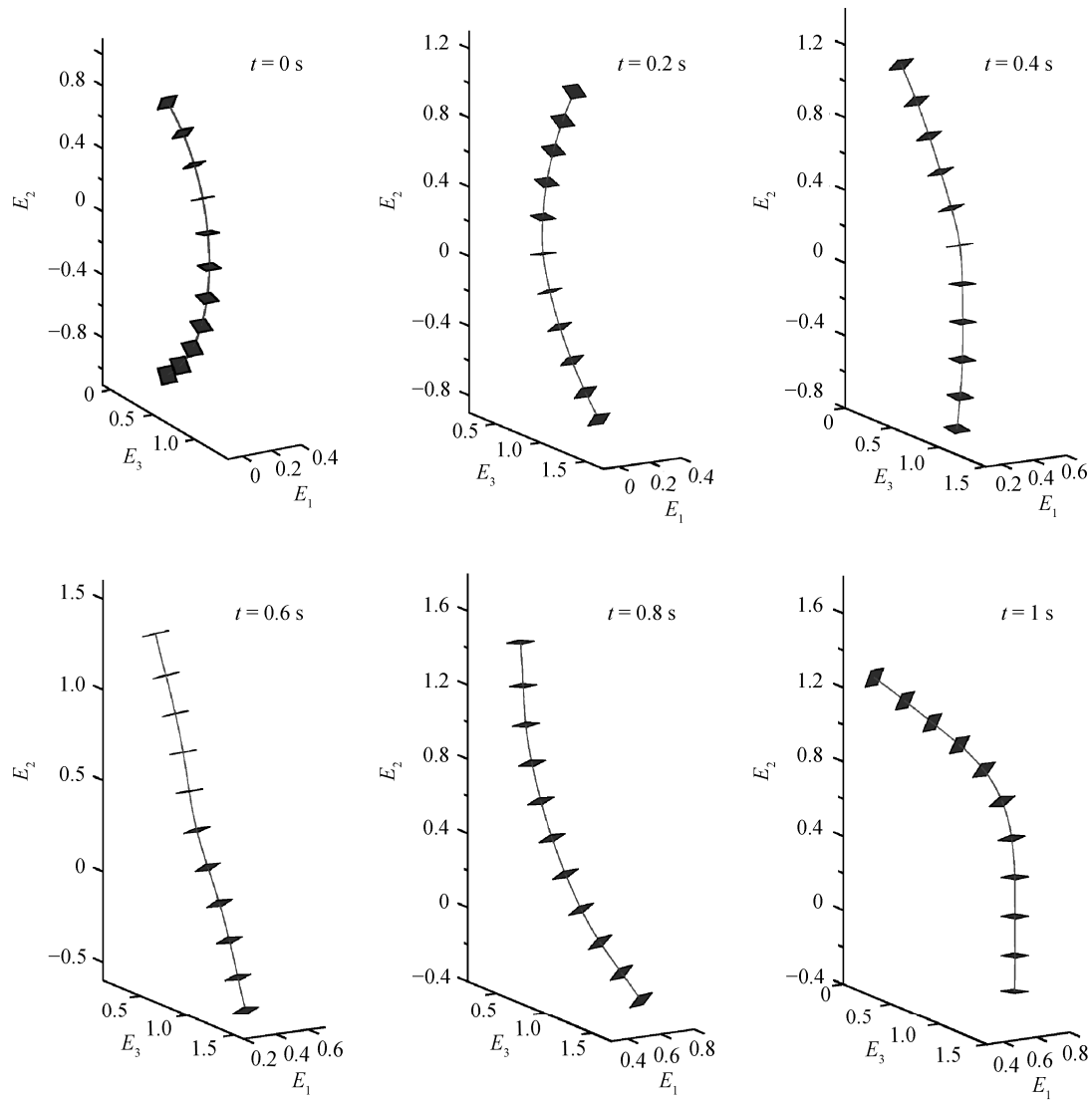


图5 梁分别在时间 $t=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 和 1 s 的状态

Fig. 5 Snapshot of the motion and deformation at $t=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$, and 1 s

明该算法保持角动量和线动量。

图4是旋转矩阵正交性验证结果,误差数量级达到 10^{-14} ,说明该算法精确地保持李群结构。

对于中线的节点,每隔10个节点取一个截面,给出梁分别在不同时间点处的运动状态(图5)。

4 结论

本文通过Hamel场变分积分分子,得到几何精确梁的离散运动方程,该算法具有保持能量、动量和几何结构的特点。与以往几何精确梁的李群变分积分分子^[10]不同,在协变场论的观点下,将时空等同离散和变分,可有效地利用势能的对称性进行约化。

本文最后以 \mathbf{R}^3 中的几何精确梁为例进行仿真,结果表明该算法能够长时间保持能量、动量以及李群结构。下一步我们将进行算法分析,与已有算法对比,并将Hamel场变分积分分子应用于Chaplygin-Timoshenko雪橇等无穷维非完整力学系统。

致谢 感谢 Dmitry Zenkov 在论文写作过程中的帮助。

参考文献

- [1] Deepak T, Amir L, Christopher D R. Geometrically exact models for soft robotic manipulators. IEEE Transactions on Robotics, 2008, 24(4): 773–780

- [2] Bishop T C, Cortez R, Zhmudsky O O. Investigation of bend and shear waves in a geometrically exact elastic rod model. *Journal of Computational Physics*, 2004, 193(2): 642–665
- [3] Reissner E. On one-dimension, large-displacement, finite-strain beam theory. *Stud Appl Math*, 1973, 52: 87–95
- [4] Antman S S. Kirchhoff problem for non-linearly elastic rods. *Quart J Appl Math*, 1974, 32(3): 221–240
- [5] Antman S S, Jordan K B. Qualitative aspects of the spatial deformation of nonlinearly elastic rods. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1975, 73(5): 85–105
- [6] Simo J C, Ju J W. Strain- and stress-based continuum damage models — I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 1987, 23(7): 821–840
- [7] 吴坛辉, 洪嘉振, 刘铸永. 非线性几何精确梁理论研究综述. *中国科技论文*, 2013, 8(11): 1126–1130
- [8] Marsden J E, West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 2001, 10: 357–514
- [9] Lew A, Marsden J E, Ortiz M, et al. An overview of variational integrators // Franca L P, Tezduyar T E, Masud A. *Finite element methods: 1970s and beyond*. Barcelona: CIMNE, 2004: 98–115
- [10] Demoures F, Gay-Balmaz F, Leyendecker S, et al. Discrete variational Lie group formulation of geometrically exact beam dynamics. *Numerische Mathematik*, 2015, 130(1): 73–123
- [11] Ball K R, Zenkov D V. Hamel’s formalism and variational integrators. *Geometry, Mechanics and Dynamics: The Legacy of Jerry Marsden*, 2015, 73: 477–506
- [12] Shi Donghua. Hamel’s field variational integrator. to appear, 2016
- [13] Simo J C, Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model, part II: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, 58 (1): 79–116
- [14] Shi Donghua, Zenkov D V, Bloch A M. Hamel’s formalism for classical field theory. to appear, 2016
- [15] Demoures F. Lie group and Lie algebra variational integrators for flexible beam and plate in \mathbb{R}^3 [D]. Lausanne: Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2012
- [16] Lewis D, Simo J C. Conserving algorithms for the dynamics of Hamiltonian systems on Lie groups. *Journal of Nonlinear Science*, 1994, 4(1): 253–299