北京大学学报(自然科学版) 第 52 卷 第 4 期 2016 年 7 月
Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 52, No. 4 (July 2016)
doi: 10.13209/j.0479-8023.2016.073

弹性细杆静力学的薛定谔粒子波动比拟

王鹏[1,†] 薛纭[2]

1. 济南大学土木建筑学院, 济南 250022; 2. 上海应用技术大学机械工程学院, 上海 201418;
† E-mail: sdpengwang@163.com

摘要 研究弹性细杆静力学的薛定谔粒子波动比拟。类似于 Kirchhoff 动力学比拟, 依据弹性细杆曲率平衡微分方程与一维定态非线性薛定谔方程数学形式的相似性, 给出两者的动力学比拟关系, 称为 Schrödinger 粒子波动比拟。基于比拟关系, 给出弹性细杆方程的 Jacobi 椭圆函数解, 并画出此解所描述的弹性细杆的空间位形。Schrödinger 粒子波动比拟建立了波函数的量子态与弹性细杆的几何构型的对应关系, 给予波函数的量子态直观的几何图像, 为弹性细杆方程的求解提供了新的途径。

关键词 弹性细杆平衡微分方程; 动力学比拟; 薛定谔方程
中图分类号 O316

Dynamics Analogy of Thin Elastic Rod and Schrödinger Particle Wave

WANG Peng[1,†], XUE Yun[2]

1. School of Civil Engineering and Architecture, University of Jinan, Jinan 250022;
2. School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418;
† E-mail: sdpengwang@163.com

Abstract The Schrödinger analogy of thin elatic rod is studied. Compared with the Kirchhoff dynamics analogy, the Schrödinger analogy is proposed. By the new analogy, the Kirchhoff equation of elastic rod can be written as curvature equation which is similar to nonlinear Schrödinger equation. Thus, the Jacobi elliptic function solution of Schrödinger equation can be taken into elastic rod equation. The space configurations of the elastic rod described by the solution are given. Schrödinger analogy reveals the relations between the quantum state of wave function and the geometry configuration of elastic rod, and gives a new way to solve the Kirchhoff equation.

Key words stationary differential equation of thin elastic rod; dynamics analogy; Schrödinger equation

Kirchhoff 动力学比拟理论利用弹性杆平衡微分方程与刚体定点转动微分方程之间的相似性, 将动力学的概念和研究方法注入弹性杆静力学, 奠定了弹性杆静力学的理论基础。近年来, 弹性细杆作为 DNA 分子等的力学模型[1–4], 重新引起重视。

由于描述对象的极端细长及软物质特性, 使得弹性细杆力学完全不同于经典弹性杆力学, 表现出更复杂的几何结构和强非线性, 给求解带来困难。大部分的研究利用数值计算求其数值解[5–6]。Shi 等[7–8]通过引入复主矢和复主矩, 导出一类一维定态非线性薛定谔方程, 并给出 DNA 分子轴线的封闭解。Xue 等[9]进一步将结果推广到非圆截面的一般情形。Wang 等[10]利用对称性得出弹性细杆的一些守恒量。

关于非线性薛定谔方程的精确解的讨论已有许多卓越的工作[11]。由于弹性细杆的特殊性, 致使 Shi 等[7–8]给出的弹性细杆薛定谔方程形式无法直接与非线性薛定谔方程比拟。我们发现, 当杆的挠率

国家自然科学基金(11262019, 11372195)资助
收稿日期: 2015–10–12; 修回日期: 2016–02–03; 网络出版日期: 2016–07–14

为常量时，类似于 Kirchhoff 动力学比拟可将弹性细杆的平衡微分方程在数学形式上完全等同于非线性薛定谔方程，进而可给出弹性细杆力学的一类新的精确解。我们将这种等同条件称为 Schrödinger 粒子波动比拟。

本文利用 Schrödinger 粒子波动比拟，给出弹性细杆方程一类新的精确解，画出精确解及数值解所描述的弹性细杆图像，为弹性细杆方程的求解提供新的途径。

1　弹性细杆平衡微分方程

研究在 Kirchhoff 假定下长为 L 的弹性细杆。建立惯性坐标系 O-$\xi\eta\zeta$，沿惯性坐标轴的单位基矢为 $\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta$，则弹性细杆中心线的矢径为

$$\boldsymbol{r} = \xi(s)\boldsymbol{e}_\xi + \eta(s)\boldsymbol{e}_\eta + \zeta\boldsymbol{e}_\zeta,$$

s 表示弧坐标。以中心线上任意点 P 为原点，建立固结于截面的主轴坐标系 P-xyz，其中 x，y 轴位于杆截面内，其基矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 分别沿中心线的法向和副法向，并且 $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{e}_3$ 沿中心线切向，中心线不可拉伸，满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{e}_3。$$

弹性细杆可看做由杆截面沿中心线的运动形成。杆的弯曲和扭转可用弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 来表征，定义[5]为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i, \tag{1}$$

其中，

$$\boldsymbol{\omega} = \kappa \sin\chi \boldsymbol{e}_1 + \kappa\cos\chi\boldsymbol{e}_2 + \left(\tau + \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{e}_3, \tag{2}$$

κ 和 τ 分别为杆挠性线的曲率和挠率，χ 为截面相对 Frenet 坐标系的扭角。弹性细杆平衡微分方程在主轴坐标系中的表示[5]为

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}s} + \omega \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{f} = 0, \\ \dfrac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s} + \omega \times \boldsymbol{M} + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{m} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

其中，$\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}$ 表示相对主轴坐标系的导数，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为杆截面上内力在形心处的主矢和主矩，$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 为分布力和分布力偶。为使以上方程封闭，引入线弹性本构方程：

$$\begin{cases} M_1 = A(\omega_1 - \omega_1^0), \\ M_2 = B(\omega_2 - \omega_2^0), \\ M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0), \end{cases} \tag{4}$$

其中，A 和 B 分别为抗弯刚度，C 为抗扭刚度，ω_i^0 为原始弯扭度。

2　Kirchhoff 弹性细杆的曲率方程

假设分布力为接触力，方向垂直于切向，故 $\boldsymbol{f}$ 沿切向分量为零。由于无摩擦，接触力矩 $\boldsymbol{m}$=0。弹性杆方程(3)可表示为复曲率形式[9]：

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi(s)}{\mathrm{d}s^2} + \mathrm{i}a\frac{\mathrm{d}\xi(s)}{\mathrm{d}s} - b\xi(s) + \frac{1}{2}|\xi|^2\xi(s) - \frac{f_F}{A}\frac{\xi(s)}{|\xi|} = 0, \tag{5}$$

其中，

$$\xi(s) = \omega_1 + \mathrm{i}\omega_2,$$

$$a = \frac{(1+2\sigma)\omega_{30}}{1+\sigma},$$

$$b = \frac{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}{2} + \frac{\sigma}{1+\sigma}\omega_{30}^2$$

为积分常量，σ 为泊松比，

$$f_F = f_{e_1} + \mathrm{i}f_{e_2}。$$

$\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}$ 表示常扭率。

虽然文献[8−9]给出弹性细杆方程一类非线性薛定谔方程，但未做进一步讨论，而是给出用曲率表示的 Euler-Lagrange 方程。由于含有曲率三次方的倒数，导致其不能与薛定谔方程比拟。现在将 $\xi(s)$ 表示为如下复指数形式：

$$\xi(s) = \kappa(s)\exp\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{as}{2}\right), \tag{6}$$

代入方程(5)中，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\kappa(s)}{\mathrm{d}s^2} - c\kappa(s) + \frac{1}{2}|\kappa|^2\kappa(s) - \frac{f_F}{A}\frac{\kappa(s)}{|\kappa|} = 0, \tag{7}$$

其中，

$$c = b - \frac{1}{4}a^2。$$

由式(6)得到

$$\chi(s)=-\frac{a}{2}s+\frac{\pi}{2},$$

代入式(2)中第三项, 计算得到挠率:

$$\tau=\omega_{30}+\frac{a}{2}=\mathrm{const}, \tag{8}$$

即方程(7)表示挠率和扭率为常量的弹性杆。

3 Kirchhoff 弹性细杆曲率方程与薛定谔方程的比拟

3.1 一维非线性薛定谔方程的 Jacobi 椭圆函数解

一维非线性薛定谔方程的一般形式为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0,\ \mathrm{i}=\sqrt{-1}, \tag{9}$$

其中, $\alpha=\frac{\hbar}{2m}$ 是频散系数, $\beta=\frac{b}{\hbar}$ 是非线性相互作用系数, 也称 Landau 系数。假设方程的解有形式

$$u(x,t)=\phi(x)\exp(\mathrm{i}Et/\hbar), \tag{10}$$

其中, E 为波函数的能量, 在定态中振幅 $\phi(x)$ 仍称为波函数。代入 NLS 方程, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\gamma}{\alpha}\phi(x)-\frac{\beta}{\alpha}\phi^3(x), \tag{11}$$

其中,

$$\gamma=\frac{E}{\hbar},\quad \gamma>0。$$

式(11)称为一维定态非线性薛定谔方程。如果 $\alpha>0$, $\beta>0$, 则定态非线性薛定谔方程具有 Jacobi 椭圆函数解[11]:

$$\phi(x)=\pm\sqrt{\frac{2\gamma}{\beta(2-k^2)}}\mathrm{dn}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha(2-k^2)}}(x-x_0),k\right], \tag{12}$$

其中, dn[ ]为第三类 Jacobi 椭圆函数, k 为 Jacobi 椭圆函数的模。

3.2 Kirchhoff 弹性细杆曲率方程的 Schrödinger 粒子波动比拟与精确解

忽略接触力, 方程(7)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\kappa(s)}{\mathrm{d}s^2}=c\kappa(s)-\frac{1}{2}\kappa^3(s)。 \tag{13}$$

在满足条件

$$\begin{cases}\dfrac{\gamma}{\alpha}=c,\\[2mm] \dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \tag{14}$$

的情况下, 方程(13)与一维定态非线性薛定谔方程(11)具有相同的数学形式, 我们称方程(13)为弹性细杆曲率表示的一维定态非线性薛定谔方程。类似于 Kirchhoff 动力学比拟, 我们给出曲率表示的弹性细杆方程与一维定态非线性薛定谔方程的比拟关系, 见表 1。

表 1 Schrödinger 粒子波动比拟：薛定谔方程与弹性细杆曲率方程

Tabel 1 Schrödinger partical fluctuation anology: Schrödinger equation and curvature equation of thin elatic rod

薛定谔方程 $\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\gamma}{\alpha}\phi(x)-\frac{\beta}{\alpha}\phi^3(x)$	弹性细杆方程 $\frac{\mathrm{d}^2\kappa(s)}{\mathrm{d}s^2}=c\kappa(s)-\frac{1}{2}\kappa^3(s)$
薛定谔方程的坐标算符 x	弹性细杆方程的弧坐标 s
定态波函数 $\phi(x)$	弹性细杆的曲率 $\kappa(s)$代表弹性细杆中心线的弯曲程度随弧坐标的变化规律, $M_1=A\kappa(s)\sin\chi$ 和 $M_2=B\kappa(s)\cos\chi$ 表示杆截面作用力的主矩, 其中 A 和 B 为绕 x 轴和 y 轴的抗弯刚度
薛定谔方程波函数的系数 $\frac{\gamma}{\alpha}$	弹性细杆方程曲率的系数 c
薛定谔方程非线性项系数 $-\frac{\beta}{\alpha}$	弹性细杆方程非线性项系数 $-\frac{1}{2}$
波函数的相位 $\frac{Et}{\hbar}$	弹性细杆截面相对 Frenet 坐标系的扭角$\chi(s)$或 $\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}s$

在 Schrödinger 粒子波动比拟关系下，方程(13)具有 Jacobi 椭圆函数解：

$$\kappa(s)=\sqrt{\frac{4c}{2-k^2}}\mathrm{dn}\left[\sqrt{\frac{c}{2-k^2}}(s-s_0),k\right]。\tag{15}$$

根据 Jacobi 椭圆正弦函数 Sn[ ]与椭圆 Delta 函数 dn[ ]的关系，我们得到椭圆正弦函数表示的弹性杆的曲率：

$$\kappa(s)=\sqrt{\frac{4c}{2-k^2}-\frac{4c}{2-k^2}k^2\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{\frac{c}{2-k^2}}(s-s_0),k\right]}。\tag{16}$$

4　弹性细杆的三维几何图像

4.1　精确解对应的几何图像

给出弹性细杆的弯扭度解之后，就可确定挠性线的位形和截面的姿态。对于 Jacobi 椭圆函数形式的曲率解(式(16))，令

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3}{10},$$

可以得到

$$\kappa(0)=0.83。$$

在挠率 $\tau=0.13$ 时，对应的弹性细杆的几何位形见图 1。由 Schrödinger 粒子波动比拟，图 1 与粒子波函数初值为 $\phi(x)|_{x=0}$=0.83 的波动状态对应。

4.2　弹性细杆数值模拟

引入无量纲弧坐标、曲率和挠率：

$$s=\left(\frac{M_0}{B}\right)s,$$

图 1　初始曲率 $\kappa(0)$=0.83，挠率 τ=0.13 时对应式(16)的弹性细杆几何形态

Fig. 1　Space configuration of thin elastic rod corresponding to solution (16) with initial curverture $\kappa(0)$=0.83 and torsion τ=0.13

$$\kappa=\left(\frac{B}{M_0}\right)\kappa,$$

$$\tau=\left(\frac{C}{M_0}\right)\tau$$

以及无量纲参数

$$c=\left(\frac{B}{M_0}\right)^2c,$$

可得到方程(13)的无量纲形式。方程的挠率为常数。令

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{1}{4},$$

方程曲率的初值为$\kappa(0)$=0.20，其一阶导数的初值为 $\kappa'(0)=0.20$，可以得到数值模拟图像(图2)。按照 Schrödinger 粒子波动比拟，图 2 中的图像对应粒子波函数初值取 $\phi(x)\big|_{x=0}=0.20$ 时的波动状态。

图 2　初始曲率 $\kappa(0)$=0.20，$\kappa'(0)$=0.20，挠率 $\tau(0)$=0.21 时对应的弹性细杆几何形态

Fig. 2　Space configuration of thin elastic rod with the initial curvature $\kappa(0)$=0.20, $\kappa'(0)$=0.20 and torsion $\tau(0)$=0.21

5　结论

本文通过引入复曲率的一种特殊表示，将弹性细杆 Kirchhoff 方程化为与一维定态非线性薛定谔方程数学形式上相似的曲率方程，给出其与 Schrödinger 粒子波动的比拟关系。

通过 Schrödinger 粒子波动比拟关系，给出 Kirchhoff 弹性细杆的曲率随弧坐标变化的 Jacobi 椭圆函数形式，从而实现将非线性薛定谔方程解移植到弹性细杆力学中。利用本文方法，也可将非线性薛定谔方程其他解引入弹性细杆方程；同时，如何将弹性细杆解引入薛定谔方程也值得进一步研究。

本文画出精确解与数值解所对应的弹性细杆图

像，给出 Schrödinger 粒子波动比拟下，粒子波动状态所对应的弹性细杆几何位形。

Schrödinger 粒子波动比拟的意义在于：类似于 Kirchhoff 动力学比拟，给出定态波函数的不同量子态在 Schrödinger 粒子波动比拟下对应的弹性细杆的不同几何图像，为弹性细杆方程的求解提供了新的途径。

参考文献

[1] Benham C J, Mielke S P. DNA mechamics. Annu Rev Biomed Eng, 2005, 7(1): 21−53

[2] 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学: DNA 力学模型的理论基础. 北京: 清华大学出版社, Springer 出版社, 2006

[3] Liu Y Z, Sheng L W. Stability and vibration of a helical rod with circular cross section in a viscous medium. Chin Phys, 2007, 16(4): 891−896

[4] 薛纭, 刘延柱. Kirchhoff 弹性直杆在力螺旋作用下的稳定性. 物理学报, 2009, 58(10): 6737−6742

[5] Klapper I. Biological applications of dynamics of twisted elastic rods. J Computational Phys, 1996, 125: 325−337

[6] 黄磊, 包光伟, 刘延柱. 弹性细杆弯曲的 Kirchhoff 方程的违约校正求解. 物理学报, 2005, 54(6): 2457−2462

[7] Shi Y M, Hearst J E. The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrodinger equation, and DNA supercoiling. J Chem Phys, 1994, 101: 5186−5200

[8] Shi Y M, Borovik A E, Hearst J E. Elastic rod model incorporation shear and extension, generalized nonlinear Schrodinger equations, and novel closed-form solutions for supercoiled DNA. J Chem Phys, 1995, 103: 3166−3183

[9] Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q. The Schrödinger equation for a Kirchhoff elastic rod with noncircular cross section. Chin Phys, 2004, 13(10): 794−797

[10] Wang P, Xue Y, Liu Y L. Mei symmetry and conserved quantities in Kirchhoff thin elastic rod statics. Chin Phys B, 2012, 21: 070203−070206

[11] 刘适式, 刘适达. 物理学中的非线性方程. 北京: 北京大学出版社, 2000