北京大学学报(自然科学版) 第 52 卷 第 4 期 2016 年 7 月
Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 52, No. 4 (July 2016)
doi: 10.13209/j.0479-8023.2016.080

典型微扰力学系统的近似 Lie 对称性、近似 Noether 对称性和近似 Mei 对称性

楼智美[1,†] 王元斌[2] 谢志堃[1]

1. 绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000; 2. 绍兴文理学院数学系, 绍兴 312000;
† E-mail: louzhimei@usx.edu.cn

摘要 利用 3 种近似对称性方法(近似 Lie 对称性法、近似 Noether 对称性法和近似 Mei 对称性法)研究典型微扰力学系统的一阶近似对称性和近似守恒量。结果表明, 利用近似 Lie 对称性法找到的 6 个一阶近似对称性和近似守恒量与利用近似 Noether 对称性法找到的相同, 而利用近似 Mei 对称性法只能找到其中 5 个一阶近似对称性和近似守恒量。

关键词 微扰力学系统; 近似 Lie 对称性; 近似 Noether 对称性; 近似 Mei 对称性; 近似守恒量

中图分类号 O320

Approximate Lie Symmetries, Approximate Noether Symmetries and Approximate Mei Symmetries of Typical Perturbed Mechanical System

LOU Zhimei[1,†], WANG Yuanbin[2], XIE Zhikun[1]

1. Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000; 2. Department of mathematics, Shaoxing University, Shaoxing 312000; † E-mail: louzhimei@usx.edu.cn

Abstract Three methods, which are approximate Lie symmetry method, approximate Noether symmetry method and approximate Mei symmetry method, are adopted to study the first order approximate symmetries and approximate conserved quantities of a typical perturbed mechanical system. Six identical first order approximate symmetries and approximate conserved quantities of the typical perturbed mechanical system are obtained by approximate Lie symmetry method and approximate Noether symmetry method, but only five of them can be obtained by approximate Mei symmetry method.

Key words perturbed mechanical system; approximate Lie symmetry; approximate Noether symmetry; approximate Mei symmetry; approximate conserved quantity

分析力学中研究力学系统的对称性与守恒量有 3 种对称性方法[1−2]: Lie 对称性法、Noether 对称性法和 Mei 对称性法。引进群无限小变换, 微分方程在此变换下保持不变为 Lie 对称性, 哈密顿作用量在此变换下保持不变为 Noether 对称性, 力学系统的动力学函数在此变换下仍然满足运动方程为 Mei 对称性。事实上, 许多实际力学系统的某些参数常常会随着位移、速度和时间的变化发生微小的变化, 即力学系统受到微扰作用, 这样的力学系统称为微扰力学系统。此类系统的近似对称性和近似守恒量研究对于研究力学系统的特性至关重要。目前, 研究微扰力学系统近似对称性与近似守恒量有两种近似对称性法: 近似 Lie 对称性法[3]和近似 Noether 对称性法[4]。引进近似的群无限小变换, 微分方程在此变换下近似保持不变为近似 Lie 对称性; 哈密顿作用量在此变换下近似保持不变则为近

国家自然科学基金(11472177)资助
收稿日期: 2015−10−09; 修回日期: 2016−02−13; 网络出版日期: 2016−07−14

似 Noether 对称性，所得的守恒量为近似守恒量。

近年来，关于常微分方程、偏微分方程近似对称性和近似守恒量的研究已取得很多成果[3–16]，文献[3–14]采用的方法都是近似 Lie 对称性法或近似 Noether 对称性法，其中文献[3–11]侧重近似对称性理论的研究，文献[12–14]侧重近似对称性理论的实际应用，文献[15]提出用直接积分法求近似守恒量的方法，文献[16]将直接积分法应用于求二阶近似守恒量。但是，到目前为止，还没有建立用近似 Mei 对称性研究近似守恒量的理论，关于 3 个近似对称性理论相互关系方面也没有深入的研究。事实上，近似 Lie 对称性法和近似 Noether 对称性法是在 Lie 对称性法和 Noether 对称性法的基础上发展起来的，那么在 Mei 对称性法的基础上也可以建立相应的近似 Mei 对称性法，即引进近似的群无限小变换，力学系统的动力学函数在此变换下近似满足运动方程为近似 Mei 对称性。

本文分析近似 Lie 对称性、近似 Noether 对称性和 Mei 对称性理论，讨论 3 种对称性间的关系，并以频率比为 2∶1 的弱非线性耦合谐振子为例，研究系统的一阶近似对称性和近似守恒量。

1　近似 Lie 对称性、近似 Noether 对称性和近似 Mei 对称性理论

1.1　近似 Lie 对称性理论[3]

具有 n 个自由度的微扰 Lagrange 力学系统，其 Lagrange 函数可以表示为 $L=L(t,q_s,\dot{q}_s,\varepsilon)$，其中 q_s 为广义坐标，$\dot{q}_s$ 为广义速度，$0<\varepsilon\ll 1$ 为微扰系数。微扰 Lagrange 力学系统的运动微分方程可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

方程(1)可简写为

$$E_s(L)=0, \tag{2}$$

其中 $E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}$ 为 Euler 算子。假设系统(式(1))非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)\neq 0, \tag{3}$$

则可求出所有的广义加速度:

$$\ddot{q}_s=a_s(t,q_s,\dot{q}_s,\varepsilon)。 \tag{4}$$

引进近似的群无限小变换

$$\begin{cases} t^*=t+\delta\tau(t,q_s,\dot{q}_s,\varepsilon), \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\delta\xi_s(t,q_s,\dot{q}_s,\varepsilon), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $s=1, 2, \ldots, n$，δ 为无限小参数，τ 和 ξ_s 为无限小变换生成元。式(5)的无限小生成元向量为

$$X^{(0)}=\tau\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{6}$$

式(6)的一次扩展为

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\tau})\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{7}$$

二次扩展为

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\sum_{s=1}^{n}(\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\tau}-2\ddot{q}_s\dot{\tau})\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}。 \tag{8}$$

式(5)~(8)中，

$$\tau=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i\tau_i,\quad \xi_s=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i\xi_{si}, \tag{9}$$

其中 $s=1, 2, \ldots, n$, k 为微扰项的阶数。

运动微分方程(1)的 k 阶近似 Lie 对称性是指式(4)在近似的群无限小变换(式(5))下近似保持不变[3]，即

$$X^{(2)}(\ddot{q}_s-a_s)=O(\varepsilon^{k+1})。 \tag{10}$$

若存在规范函数

$$G=G(q_s,\dot{q}_s,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i G_i \quad (s=1,2,\ldots,n) \tag{11}$$

满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s+\left(L-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\tau}=-\dot{G}, \tag{12}$$

则系统存在 k 阶近似守恒量

$$I=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i I_i, \tag{13}$$

且

$$I=L\tau+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\tau)+G, \tag{14}$$

满足

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=O(\varepsilon^{k+1})\text{。} \tag{15}$$

将式(4)代入式(10)并展开，令 $\varepsilon^0, \varepsilon^1, ..., \varepsilon^k$ 的系数为 0，可求得无限小生成元 τ 和 ξ_s。将所得生成元代入式(12)，并比较等式两边 $\varepsilon^0, \varepsilon^1, ..., \varepsilon^k$ 的系数可求得规范函数 G。将 Lagrange 函数 L 及求得的无限小生成元 τ 和 ξ_s 以及规范函数 G 代入式(14)，可求得系统的近似守恒量 I。

在式(13)中，若 $I_0 \neq 0$，$I_i\ (i=1,2,...,k)$ 均为 0，则称 I 为未受微扰力学系统的精确守恒量，相应的对称性为未受微扰力学系统的精确对称性。若 $I_0 \neq 0$，且至少有一个 $I_i\ (i=1,2,...,k)$ 不为 0，则称 I 为微扰力学系统稳定的近似守恒量，相应的对称性为稳定的近似对称性。若 $I_0=0$，且至少有一个 $I_i\ (i=1,2,...,k)$ 不为 0，则称 I 为微扰力学系统平凡的近似守恒量，相应的对称性为平凡的近似对称性。

1.2　近似 Noether 对称性理论

近似 Noether 对称性[4]指在近似的群无限小变换(式(5))下，哈密顿作用量在此变换下近似保持不变，即

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} L(t,q_s,\dot{q}_s,\varepsilon)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1^*}^{t_2^*} L(t,q_s^*,\dot{q}_s^*,\varepsilon)\mathrm{d}t^*+O(\varepsilon^{k+1}),\end{aligned} \tag{16}$$

则称无限小变换(式(5))为近似 Noether 对称变换。

若无限小生成元(式(9))和规范函数(式(11))满足确定方程(12)，则存在相应的近似守恒量(式(14))。

将式(9)和(11)代入式(12)，并比较式(12)两边 $\varepsilon^0, \varepsilon^1, ..., \varepsilon^k$ 的系数，可求得无限小生成元 τ 和 ξ_s 以及规范函数 G。将 Lagrange 函数 L 及求得的无限小生成元 τ 和 ξ_s 以及规范函数 G 代入式(14)，可求得系统的近似守恒量 I。

1.3　近似 Mei 对称性理论

假设经无限小变换(5)后，系统的 Lagrange 函数 $L(t,q,\dot{q},\varepsilon)$ 变成 L^*：

$$\begin{aligned}L^*&=L\left(t^*,q^*,\frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*},\varepsilon\right)\\&=L(t,q,\dot{q},\varepsilon)+\delta X^{(1)}(L)+O(\delta^2)\text{。}\end{aligned} \tag{17}$$

如果用变换后的 Lagrange 函数 L^* 代替变换前的 L 时，方程(2)的形式近似保持不变，即

$$E_s(L^*)=O(\varepsilon^{k+1}), \tag{18}$$

那么称这种不变性为系统的 k 阶近似 Mei 对称性。

将式(17)代入式(18)，忽略 δ^2 及更高阶小量，并利用式(2)，得到

$$E_s(X^{(1)}(L))=O(\varepsilon^{k+1})\text{。} \tag{19}$$

对于微扰 Lagrange 力学系统(式(2))，如果无限小生成元 τ,ξ_s 满足方程(19)，则相应的近似不变性为系统的 k 阶近似 Mei 对称性。方程(19)称为近似 Mei 对称性的判据方程。

若无限小生成元(式(9))和规范函数(11)满足确定方程(12)，则存在相应的近似守恒量(式(14))。

将 Lagrange 函数 L 代入式(19)并展开，令 ε^0, ε^1,…, ε^k 的系数为 0，可求得无限小生成元 τ 和 ξ_s。将所得生成元代入式(12)，并比较等式两边 ε^0, ε^1,…, ε^k 的系数可求得规范函数 G。将 Lagrange 函数 L 及求得的无限小生成元 τ 和 ξ_s 以及规范函数 G 代入式(14)，可求得系统的近似守恒量 I。

1.4　3 种对称性的关系

若无限小生成元(式(9))满足式(10)，说明系统具有近似 Lie 对称性。若无限小生成元(式(9))满足式(10)且满足式(12)，并能找到相应的规范函数，则说明系统既具有近似 Lie 对称性，又具有近似 Noether 对称性，找到的近似守恒量既是近似 Lie 对称性守恒量，又是近似 Noether 对称性守恒量。

若无限小生成元(式(9))满足式(19)，则说明系统具有近似 Mei 对称性。若无限小生成元(式(9))同时满足式(10)和(19)，则说明系统同时具有近似 Lie 对称性和近似 Mei 对称性。

若无限小生成元(式(9))同时满足式(10)，(12)和(19)，并能找到相应的规范函数，则说明系统同时具有近似 Lie 对称性、近似 Mei 对称性和近似 Noether 对称性，找到的近似守恒量既是近似 Lie 对称性守恒量，又是近似 Mei 对称性守恒量，也是近似 Noether 对称性守恒量。

2　典型微扰力学系统的一阶近似对称性和一阶近似守恒量

频率比为 2:1 的弱非线性耦合谐振子的 Lagrange 函数[13]为

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2-2x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2+\varepsilon x_1x_2^2, \tag{20}$$

运动微分方程为

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=-4x_1+\varepsilon x_2^2,\\ \ddot{x}_2=-x_2+2\varepsilon x_1x_2。\end{cases} \tag{21}$$

2.1 一阶近似 Lie 对称性与近似守恒量

研究系统的一阶近似 Lie 对称性与近似守恒量。将式(21)代入式(10)并展开, 令 ε^0, ε^1 的系数为 0, 可求得如下 6 组生成元[13]:

$$\begin{cases}\tau_0=-1,\ \tau_1=\xi_{11}=\xi_{21}=0,\\ \xi_{10}=\xi_{20}=0,\end{cases} \tag{22a}$$

$$\begin{cases}\tau_0=\xi_{10}=\xi_{20}=0, \tau_1=-1,\\ \xi_{11}=\xi_{21}=0,\end{cases} \tag{22b}$$

$$\begin{cases}\tau_0=\xi_{10}=\xi_{20}=0, \tau_1=-1,\\ \xi_{11}=0, \xi_{21}=-\dot{x}_2,\end{cases} \tag{22c}$$

$$\begin{cases}\tau_0=\xi_{10}=\xi_{20}=0, \tau_1=-1,\\ \xi_{11}=-\dot{x}_1, \xi_{21}=0,\end{cases} \tag{22d}$$

$$\begin{cases}\tau_0=\xi_{10}=\xi_{20}=0, \tau_1=0,\\ \xi_{11}=x_2\dot{x}_2, \xi_{21}=x_2\dot{x}_1-2x_1\dot{x}_2,\end{cases} \tag{22e}$$

$$\begin{cases}\tau_0=0, \tau_1=0,\\ \xi_{10}=x_2\dot{x}_2, \xi_{20}=x_2\dot{x}_1-2x_1\dot{x}_2,\\ \xi_{11}=\dfrac{-8x_1x_2\dot{x}_2+5x_2^2\dot{x}_1-3\dot{x}_1\dot{x}_2^2}{8},\\ \xi_{21}=\dfrac{1}{8}(-4x_1^2\dot{x}_2-8x_1x_2\dot{x}_1+\\ \quad 3x_2^2\dot{x}_2-3\dot{x}_1^2\dot{x}_2+3\dot{x}_2^3)。\end{cases} \tag{22f}$$

说明频率比为 2:1 的弱非线性耦合谐振子系统具有 6 个一阶近似 Lie 对称性。将式(20)和(22)代入式(12), 并比较等式两边 ε^0, ε^1 的系数, 可求得与上述 6 组生成元相应的规范函数[13]:

$$G_0=0,\ G_1=0, \tag{23a}$$

$$G_0=0,\ G_1=0, \tag{23b}$$

$$G_0=0,\quad G_1=\frac{1}{2}\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}x_2^2, \tag{23c}$$

$$G_0=0,\quad G_1=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2-2x_1^2, \tag{23d}$$

$$G_0=0, G_1=x_1x_2^2+x_1\dot{x}_2^2-x_2\dot{x}_1\dot{x}_2, \tag{23e}$$

$$\begin{cases}G_0=x_1x_2^2+x_1\dot{x}_2^2-x_2\dot{x}_1\dot{x}_2,\\ G_1=\dfrac{1}{32}(8x_1^2\dot{x}_2^2-8x_1^2x_2^2+\\ \quad 32x_1x_2\dot{x}_1\dot{x}_2-5x_2^4-10x_2^2\dot{x}_1^2-\\ \quad 6x_2^2\dot{x}_2^2+18\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2-9\dot{x}_2^4)。\end{cases} \tag{23f}$$

将式(20), (22)和(23)代入式(14), 得到 6 个一阶近似守恒量[13]:

$$I^1=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+2x_1^2+x_2^2-\varepsilon x_1x_2^2, \tag{24a}$$

$$I^2=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+2x_1^2+x_2^2\right)=\varepsilon I_0^1, \tag{24b}$$

$$I^3=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+2x_1^2\right)=\varepsilon I_0^2, \tag{24c}$$

$$I^4=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}x_2^2\right)=\varepsilon I_0^3, \tag{24d}$$

$$I^5=\varepsilon(x_1x_2^2-x_1\dot{x}_2^2+x_2\dot{x}_1\dot{x}_2)=\varepsilon I_0^4, \tag{24e}$$

$$\begin{aligned}I^6=&x_1x_2^2-x_1\dot{x}_2^2+x_2\dot{x}_1\dot{x}_2+\\ &\frac{\varepsilon}{32}(10x_2^2\dot{x}_1^2+6x_2^2\dot{x}_2^2+3\dot{x}_2^4-\\ &8x_1^2x_2^2-8x_1^2\dot{x}_2^2-32x_1x_2\dot{x}_1\dot{x}_2-\\ &5x_2^4-6\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2),\end{aligned} \tag{24f}$$

其中,

$$I_0^1=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+2x_1^2+x_2^2, \tag{25a}$$

$$I_0^2=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+2x_1^2, \tag{25b}$$

$$I_0^3=\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}x_2^2, \tag{25c}$$

$$I_0^4=x_1x_2^2-x_1\dot{x}_2^2+x_2\dot{x}_1\dot{x}_2。 \tag{25d}$$

I_0^1, I_0^2, I_0^3 和 I_0^4 为不受非线性耦合项作用的二维各向异性谐振子的 4 个守恒量, 均满足 $\dfrac{\mathrm{d}I_0^i}{\mathrm{d}t}=0$ (i=1, 2, 3, 4), 其中 I_0^1 为系统的总能量, I_0^2 和 I_0^3 为两个分振子的能量, 这 4 个守恒量不是相互独立的, 存在 $I_0^1=I_0^2+I_0^3$ 的关系。I^1 为弱非线性耦合谐振子的哈密顿函数, I^2, I^3, I^4 和 I^5 为平凡的一阶近似守恒量, I^6 为稳定的一阶近似守恒量。

2.2　一阶近似 Noether 对称性与近似守恒量

研究系统的一阶近似 Noether 对称性与一阶近似守恒量。式(22)表示的 6 组生成元和式(23)表示的 6 个规范函数均符合 Noether 恒等式(12), 因此, 系统同时具有式(22)表示的 6 个一阶近似 Noether 对称性和式(24)表示的 6 个一阶近似 Noether 守恒量。

2.3　一阶近似 Mei 对称性与近似守恒量

研究系统的一阶近似 Mei 对称性与一阶近似守恒量。将式(20)代入式(19), 只能求得如下 5 组生成元:

$$\begin{cases}\tau_0=-1,\ \tau_1=\xi_{11}=\xi_{21}=0,\\ \xi_{10}=\xi_{20}=0,\end{cases} \tag{26a}$$

$$\begin{cases}\tau_0=\xi_{10}=\xi_{20}=0,\ \tau_1=-1,\\ \xi_{11}=\xi_{21}=0,\end{cases} \tag{26b}$$

$$\begin{cases}\tau_0=\xi_{10}=\xi_{20}=0,\ \tau_1=-1,\\ \xi_{11}=0,\ \xi_{21}=-\dot{x}_2,\end{cases} \tag{26c}$$

$$\begin{cases}\tau_0=\xi_{10}=\xi_{20}=0,\ \tau_1=-1,\\ \xi_{11}=-\dot{x}_1,\ \xi_{21}=0,\end{cases} \tag{26d}$$

$$\begin{cases}\tau_0=\xi_{10}=\xi_{20}=0,\ \tau_1=0,\\ \xi_{11}=x_2\dot{x}_2,\ \xi_{21}=x_2\dot{x}_1-2x_1\dot{x}_2\text{。}\end{cases} \tag{26e}$$

这 5 组生成元与式(22)中的前 5 组相同。将式(20)和(26)代入式(12), 并比较等式两边 ε^0, ε^1 的系数, 可求得与上述 5 组生成元相应的规范函数:

$$G_0=0,\ G_1=0, \tag{27a}$$

$$G_0=0,\ G_1=0, \tag{27b}$$

$$G_0=0,\ G_1=\frac{1}{2}\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}x_2^2, \tag{27c}$$

$$G_0=0,\ G_1=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2-2x_1^2, \tag{27d}$$

$$G_0=0,\ G_1=x_1x_2^2+x_1\dot{x}_2^2-x_2\dot{x}_1\dot{x}_2\text{。} \tag{27e}$$

这 5 个规范函数与式(23)中前 5 个规范函数相同。

将式(20), (26)和(27)代入式(14), 得到 5 个一阶近似守恒量:

$$I^1=\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+2x_1^2+x_2^2-\varepsilon x_1x_2^2, \tag{28a}$$

$$I^2=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+2x_1^2+x_2^2\right)=\varepsilon I_0^1, \tag{28b}$$

$$I^3=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{x}_1^2+2x_1^2\right)=\varepsilon I_0^2, \tag{28c}$$

$$I^4=\varepsilon\left(\frac{1}{2}\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}x_2^2\right)=\varepsilon I_0^3, \tag{28d}$$

$$I^5=\varepsilon(x_1x_2^2-x_1\dot{x}_2^2+x_2\dot{x}_1\dot{x}_2)=\varepsilon I_0^4\text{。} \tag{28e}$$

这 5 个守恒量与(24)式中的前 5 个守恒量相同。由近似 Mei 对称性只能求得微扰力学系统的哈密顿函数和 4 个平凡的一阶近似守恒量, 不能求得稳定的一阶近似守恒量。

3　结论

本文阐述了 3 种近似对称性理论及其相互关系, 并用 3 种近似对称性理论研究了频率比为 2:1 的弱非线性耦合谐振子的近似对称性与近似守恒量, 结果表明, 利用近似 Lie 对称性法和近似 Noether 对称性法能找到 6 个相同的一阶近似对称性和近似守恒量。6 个近似守恒量中, 1 个是系统的哈密顿函数; 4 个是平凡的一阶近似守恒量, 1 个是稳定的一阶近似守恒量。用近似 Mei 对称性法只能找到 5 个一阶近似对称性和近似守恒量, 且 5 个近似守恒量与用近似 Lie 对称性法和近似 Noether 对称性法找到的其中 5 个相同。用近似 Mei 对称性法只找到哈密顿函数和 4 个平凡的一阶近似守恒量, 不能找到稳定的一阶近似守恒量。结果说明, 系统要具有近似 Mei 对称性的条件更严。

参考文献

[1] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京: 科学出版社, 1999

[2] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京: 北京理工大学出版社, 2004

[3] Leach P G L, Moyo S, Cotsakis S, et al. Symmetry, singularities and integrability in complex dynamics Ⅲ: approximate symmetries and invariants. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2001, 8(1): 139–156

[4] Govinder K S, Heil T G, Uzer T. Approximate Noether symmetries. Physics Letters A, 1998, 240(3): 127–131

[5] Naeem I, Mahomed F M. Approximate first integrals

for a system of two coupled van der Pol oscillators with linear diffusive coupling. Mathematical and Computational Applications, 2010, 15(4): 720–731

[6] Unal G. Approximate generalized symmetries, normal forms and approximate first integrals. Physics Letters A, 2000, 266(2): 106–122

[7] Dolapci I T, Pakdemirli M. Approximate symmetries of creeping flow equations of a second grade fluid. International Journal of Non-linear Mechanics, 2004, 39(10): 1603–1619

[8] Kara A H, Mahomed F M, Qadir A. Approximate symmetries and conservation laws of the geodesic equations for the Schwarzschild metric. Nonlinear Dynamics, 2008, 51(1/2): 183–188

[9] Grebenev V N, Oberlack M. Approximate Lie symmetries of the Navier-Stokes equations. Journal of Non-linear Mathematical Physics, 2007, 14(2): 157–163

[10] Johnpillai A G, Kara A H, Mahomed F M. Approximate Noether-type symmetries and conservation laws via partial Lagrangians for PDEs with a small parameter. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223(1): 508–518

[11] Zhang Z Y, Yong X L, Chen Y F. A new method to obtain approximate symmetry of nonlinear evolution equation form perturbations. Chinese Physics B, 2009, 18(7): 2629–2633

[12] 楼智美. 两自由度弱非线性耦合系统的一阶近似 Lie 对称性与近似守恒量. 物理学报, 2013, 62(22): 220202

[13] 楼智美, 梅凤翔, 陈子栋. 弱非线性耦合二维各向异性谐振子的一阶近似 Lie 对称性与近似守恒量. 物理学报, 2012 61(11): 110204

[14] 楼智美. 微扰 Kepler 系统轨道微分方程的近似 Lie 对称性与近似不变量. 物理学报, 2010, 59(10): 6764–6769

[15] 楼智美. 含非线性微扰项的二阶动力学系统的一阶近似守恒量的一种新求法. 物理学报, 2014, 63(6): 060202

[16] 楼智美. 两自由度微扰力学系统的二阶近似守恒量. 动力学与控制学报, 2015, 13(3): 165–169