

基于能量-Casimir方法的刚-液-柔耦合航天器系统稳定性分析

岳宝增[†] 闫玉龙

北京理工大学宇航学院, 北京 100081; [†] E-mail: bzyue@bit.edu.cn

摘要 采用能量-Casimir法对含有柔性附件的充液航天器系统的稳定性进行研究。首先, 将燃料晃动和柔性附件分别简化为弹簧-质量块模型和剪切梁模型, 建立航天器系统的刚-液-柔耦合模型, 通过分析主刚体、液体燃料和柔性附件各部分的动能和势能, 推导得到系统的能量-Casimir函数; 然后, 计算能量-Casimir函数的一阶变分和二阶变分, 从而推导出航天器系统的非线性稳定条件; 最后, 通过数值计算, 得到参数空间中系统的稳定和不稳定区域。研究结果显示, 航天器刚体的转动惯量、剪切梁的长度、航天器自旋角速度及储液腔的充液比对航天器的姿态稳定性有较大影响。

关键词 航天器动力学与控制; 非线性稳定; 能量-Casimir法; 液体晃动

中图分类号 O31

Stability Analysis of Rigid-Liquid-Flexible Coupling Dynamics of Spacecraft Systems by Using the Energy-Casimir Method

YUE Baozeng[†], YAN Yulong

School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081; [†] E-mail: bzyue@bit.edu.cn

Abstract The stability of liquid filled spacecraft with flexible appendage was researched by using energy-Casimir method. Liquid sloshing dynamics was simplified by spring-mass model, and flexible appendage was modeled as a linear shearing beam. Rigid-liquid-flexible coupling dynamics of spacecraft was built. The energy function and the Casimir function were derived by analyzing the energy function of a rigid body, liquid sloshing and a flexible appendage. The nonlinear stability condition of coupled spacecraft system was derived by computing the first and second variation of energy-Casimir function. The stable and unstable regions of the parameter space were given in the final section with numerical computation. Related results show that the inertia matrix, the length of shearing beam, the spacecraft spinning rate, and the filled ratio of liquid fuel tank have strong influence on the stability of coupled spacecraft system.

Key words spacecraft dynamic and control; nonlinear stability; energy-Casimir method; liquid sloshing

随着航天事业的发展, 现代航天器需要携带大量的液体燃料, 并且带有太阳能帆板、天线、机械臂等柔性附件, 多为刚-液-柔耦合系统。相关研究表明, 由于耦合效应的存在, 航天器系统存在着静止、周期运动、准周期运动和混沌运动等复杂的非线性现象, 且在不同的外激励参数下, 面内/外模态

的稳态动力学行为会发生变化^[1-2]。

很多学者对刚柔耦合系统的稳定性进行了深入研究。Krishnaprasad等^[3]通过Poisson流形和简化方法得到刚柔耦合系统的Poisson括号, 并采用Poisson括号及系统的能量函数得到系统的运动方程, 通过能量-Casimir法对系统的稳定性进行分析,

得到非线性稳定性条件。基于 Krishnaprasad 等^[3]的研究, Posbergh 等^[4]对带有柔性附件刚体的非线性稳定性分析进行详细推导, 得到系统自旋稳定的条件。Kane 等^[5]讨论带有柔性附件刚体平动和转动相互耦合的情况, 对由科氏力造成的离心刚化效应进行研究, 并对结果进行数值仿真。Bloch^[6]针对由平面刚体和柔性附件组成的系统, 分别建立存在离心刚化和不存在离心刚化的两种模型, 并运用能量-动量法对两种情况的平衡点非线性稳定进行分析。

岳宝增等^[7]以及 Ahmad 等^[8]分别采用能量-Casimir 法对部分充液航天器姿态运动的稳定性进行研究, 通过将液体晃动分别等效为质量弹簧模型和球摆模型, 建立充液航天器的力学模型, 并通过能量-Casimir 法得到耦合系统的稳定性条件。杨旦旦等^[9]基于 Lyapunov 稳定性理论, 研究带轻质悬臂梁附件充液航天器的姿态机动控制问题, 将晃动液体用黏性力矩球摆模型等效, 利用 Lyapunov 稳定性理论得到姿态机动的稳定性判据, 并通过数值仿真验证了控制算法的有效性。

本文基于能量-Casimir 法, 研究含有柔性附件充液航天器系统的稳定性。为简化起见, 将晃动液体燃料简化为质量-弹簧模型, 仅考虑液体燃料沿本体坐标系某一坐标轴方向的横向晃动。设定航天器的储液腔为椭球形, 将柔性附件简化为线性剪切梁。

1 航天器动力学建模

考虑如图 1 所示的含有柔性附件和椭球形储液腔的刚体航天器。

设惯性坐标系原点为储液腔的几何中心 O , 航

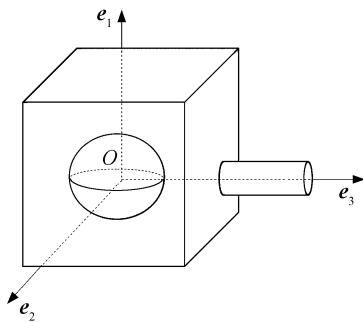


图 1 含有附件的充液航天器示意图

Fig. 1 Dynamic model of spacecraft with liquid fuel and flexible appendage

天器刚体部分的质量(除燃料和柔性附件之外的质量)为 m_H , 选择点 O 为本体坐标系原点, 本体坐标系沿刚体航天器惯性主轴方向, 其中坐标轴的单位向量为 (e_1, e_2, e_3) , 本体坐标系相对于惯性坐标系中的角速度为 Ω , 刚体航天器关于本体标架惯性矩阵为 $J_H = \text{diag}(j_{11}, j_{22}, j_{33})$ 。

液体燃料晃动的简化力学模型通过质量-弹簧模型描述, 如图 2 所示。晃动质量为 \bar{m} , 在本体坐标系中为 $r_m = (r_m, 0, a_1)^T$, 晃动质量静止位置记为 $r'_m = (0, 0, a_1)^T$ 。不参与晃动燃料的质量为 m_F , 在本体坐标系为 $r_F = (0, 0, a_2)^T$ 。对任意向量 $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, 定义 a 的反对称矩阵 $S(a)$ 为

$$S(a) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

根据以上定义, 对于任意向量 $b = (b_1, b_2, b_3)^T$, 有 $a \times b = S(a)b$ 。航天器相对于本体坐标系的静止总质量为 $m_s = m_H + m_F$ 。首先, 考虑晃动质量 \bar{m} 的动能为

$$K_m = \frac{1}{2} \bar{m} (\Omega \times r_m) \cdot (\Omega \times r_m) + \bar{m} (\Omega \times r_m) \cdot \dot{r}_m + \frac{1}{2} \bar{m} \dot{r}_m \cdot \dot{r}_m. \quad (2)$$

未晃动质量 m_F 和航天器的刚体部分 m_H 的动能分别表示为

$$K_F = \frac{1}{2} m_F (\Omega \times r_F) \cdot (\Omega \times r_F) = \frac{1}{2} m_F \Omega^T S^T(r_F) S(r_F) \Omega, \quad (3)$$

$$K_H = \frac{1}{2} m_H (\Omega \times r_H) \cdot (\Omega \times r_H) = \frac{1}{2} \Omega^T J_H \Omega. \quad (4)$$

根据式(2)~(4)可得到刚液耦合航天器系统的动

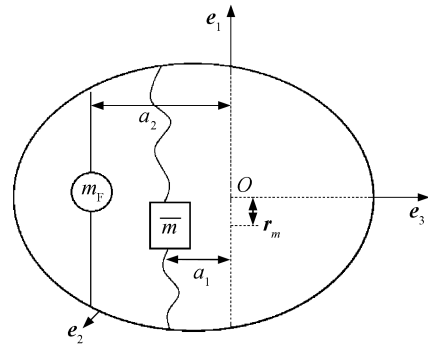


图 2 储液腔燃料晃动等效力学模型

Fig. 2 Equivalent mass-spring mechanical model of fuel sloshing in the tank

能为

$$K = K_m + K_H + K_F = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}^T \quad \dot{\mathbf{r}}_m^T) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{J}_S - \bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m)\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) & \bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) \\ -\bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) & \bar{m}\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中, $\mathbf{J}_S = \mathbf{J}_H + m_F \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_F)\mathbf{S}(\mathbf{r}_F) = \text{diag}(j_{S1}, j_{S2}, j_{S3})$ 为 m_S 相对于本体坐标系的惯性矩, $j_{S1} = j_{11} + m_F a_2^2$, $j_{S2} = j_{22} + m_F a_2^2$, $j_{S3} = j_{33}$ 。

晃动模型的等效弹性力为

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = -k(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m) = -\partial P / \partial(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m), \quad (6)$$

其中, k 为等效弹性系数。因此, 弹性势能为 $P = k(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m) \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m) / 2$, 航天器系统刚体和液体部分的能量为动能和弹簧的弹性势能之和:

$$\begin{aligned} H_1 &= K + P \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}^T \quad \dot{\mathbf{r}}_m^T) \begin{pmatrix} \mathbf{J}_S - \bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m)\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) & \bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) \\ -\bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) & \bar{m}\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \end{pmatrix} + \frac{1}{2}k(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m) \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m). \end{aligned} \quad (7)$$

下面将柔性附件简化为线性可伸展的剪切梁模型, 设定梁在静止状态下沿着本体坐标系的 \mathbf{e}_3 轴方向, 柔性附件与刚体的连接点在本体坐标下为 $\mathbf{b} = (0, 0, b)^T$ 。令 ρ_0 为单位长度的剪切梁的质量, L 为剪切梁的长度, 剪切梁在静止状态下点 $s \in [0, L]$ 在梁发生小变形时对应的位置为 $\mathbf{r}_b(s)$, 动量密度为 $\boldsymbol{\sigma}(s)$, 令 \mathbf{K} 为剪切梁弹性系数的对角阵, 则剪切梁的能量函数为

$$H_2 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\|\boldsymbol{\sigma}(s)\|^2}{\rho_0} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} ds. \quad (8)$$

剪切梁的边界方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_b(0) = [0, 0, b]^T = \mathbf{b}, \\ \mathbf{r}'_b(L) = [0, 0, 1]^T = \mathbf{e}_3. \end{cases} \quad (9)$$

因此, 由式(7)和(8)可以得到耦合航天器系统的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}^T \quad \dot{\mathbf{r}}_m^T) \begin{pmatrix} \mathbf{J}_S - \bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m)\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) & \bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) \\ -\bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_m) & \bar{m}\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \dot{\mathbf{r}}_m \end{pmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{2}k(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m) \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m) + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\|\boldsymbol{\sigma}(s)\|^2}{\rho_0} ds + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} ds, \quad (10)$$

可推出刚-液耦合系统总的角动量及晃动质量线动量的表达式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{J}_S \boldsymbol{\Omega} - \bar{m} \mathbf{r}_m \times (\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\Omega}) + \bar{m} \mathbf{r}_m \times \dot{\mathbf{r}}_m, \\ \mathbf{P}_m = -\bar{m} \mathbf{S}(\mathbf{r}_m) \boldsymbol{\Omega} + \bar{m} \dot{\mathbf{r}}_m. \end{cases} \quad (11)$$

因此, 考虑边界条件, 可得到系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\Pi}} = \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{r}_b(L) \times \mathbf{K} \mathbf{e}_3 + b \mathbf{e}_3 \times \\ \quad \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} + \int_0^L \left(\frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} \times \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} \right) ds, \\ \dot{\mathbf{r}}_b = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho_0} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_b, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\mathbf{K} \frac{d^2 \mathbf{r}_b}{ds^2} - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\sigma}, \\ \dot{\mathbf{P}}_m = \mathbf{P}_m \times \boldsymbol{\Omega} - k(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m). \end{cases} \quad (12)$$

2 稳定性分析

考虑耦合系统不受到外力和外力矩, 则系统的能量和角动量为守恒量。可通过能量函数以及定义 Casimir 函数, 运用能量-Casimir 法判断刚-液-柔系统的稳定性。令

$$C = \left\| \mathbf{J}_S \boldsymbol{\Omega} - \bar{m} \mathbf{r}_m \times (\mathbf{r}_m \times \boldsymbol{\Omega}) + \bar{m} \mathbf{r}_m \times \dot{\mathbf{r}}_m + \int_0^L \mathbf{r}_b \times \boldsymbol{\sigma} ds \right\|^2,$$

定义 Casimir 函数 $\psi = \frac{1}{2} \psi_C(C)$ 以及 Casimir 函数的一阶导数和二阶导数分别为

$$\psi' = \frac{\partial \psi_C}{\partial C}, \quad \psi'' = \frac{\partial^2 \psi_C}{\partial C^2}.$$

因此能量函数和 Casimir 函数的和为

$$\begin{aligned} H + \psi &= \frac{1}{2} \bar{m} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_m) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_m) + \bar{m} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_m) \cdot \dot{\mathbf{r}}_m + \\ &\quad \frac{1}{2} \bar{m} \dot{\mathbf{r}}_m \cdot \dot{\mathbf{r}}_m + \frac{1}{2} \mathbf{J}_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} k (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m) \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_m) + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\|\boldsymbol{\sigma}(s)\|^2}{\rho_0} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} ds + \psi. \end{aligned} \quad (13)$$

下面求函数 $H + \psi$ 的一阶变分。定义

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} \bar{m}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) + \bar{m}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \cdot \\ &\quad \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \frac{1}{2} \bar{m} \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \frac{1}{2} J_s \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \\ &\quad \frac{1}{2} k(\mathbf{r}_{\bar{m}} - \mathbf{r}'_{\bar{m}}) \cdot (\mathbf{r}_{\bar{m}} - \mathbf{r}'_{\bar{m}}), \\ f_2 &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\|\boldsymbol{\sigma}(s)\|^2}{\rho_0} ds, \\ f_3 &= \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} ds \end{aligned} \right. \quad (14)$$

分别表示刚-液系统的能量函数及剪切梁的动能和势能函数。对以上各式进行变分, 则有

$$\begin{aligned} D(f_1) &= (-\bar{m}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \times \mathbf{r}_{\bar{m}} - \bar{m}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) + \\ &\quad J_s \boldsymbol{\Omega}) \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} + \bar{m}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}} + \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}) \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \\ &\quad (\bar{m}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \times \boldsymbol{\Omega} + \bar{m}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) + \\ &\quad k(\mathbf{r}_{\bar{m}} - \mathbf{r}'_{\bar{m}})) \cdot \delta \mathbf{r}_{\bar{m}}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$D(f_2) = \int_0^L \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}}{\rho_0} ds, \quad (16)$$

$$D(f_3) = \int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{r}_b}{\partial s} ds.$$

根据边界条件 $\delta \mathbf{r}_b(0) = \delta \mathbf{r}_b(L) = 0$, 则 $D(f_3)$ 可表示为

$$\begin{aligned} D(f_3) &= \int_0^L \mathbf{K} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial s} \cdot \delta \mathbf{r}_b \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{r}_b}{\partial s^2} \cdot \delta \mathbf{r}_b \right] ds \\ &= - \int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_b}{\partial s^2} \cdot \delta \mathbf{r}_b ds. \end{aligned} \quad (17)$$

定义

$$\boldsymbol{\alpha} = J_s \boldsymbol{\Omega} - \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) + \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \int_0^L \mathbf{r}_b \times \boldsymbol{\sigma} ds \quad (18)$$

表示耦合航天器系统的总角动量, 则 Casimir 函数 ψ 的一阶变分为

$$\begin{aligned} D\psi(C) &= \psi' \boldsymbol{\alpha} \cdot \delta \boldsymbol{\alpha} \\ &= \psi'(J_s^T \boldsymbol{\alpha} - \bar{m}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} + \\ &\quad \psi' \bar{m}(\boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \times \\ &\quad \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}) \cdot \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \psi' \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{\bar{m}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} - \\ &\quad \int_0^L \psi'(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \psi'(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_b) \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} ds. \end{aligned} \quad (19)$$

根据式(15)~(17)和(19)可以得到函数 $H + \psi$ 的一阶变分:

$$\begin{aligned} D(H + \psi) &= [J_s \boldsymbol{\Omega} - \bar{m}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \times \mathbf{r}_{\bar{m}} - \bar{m}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) + \\ &\quad \psi' J_s^T \boldsymbol{\alpha} - \bar{m} \psi'(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \times \mathbf{r}_{\bar{m}}] \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} + \\ &\quad \bar{m}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}} + \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \psi' \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \\ &\quad (\bar{m}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \times \boldsymbol{\Omega} + \bar{m}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) + \\ &\quad k(\mathbf{r}_{\bar{m}} - \mathbf{r}'_{\bar{m}}) + \psi' \bar{m}(\boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) + \\ &\quad (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}})) \cdot \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} - \\ &\quad \int_0^L \left(\mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_b}{\partial s^2} + \psi'(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\sigma}) \right) \cdot \delta \mathbf{r}_b ds + \\ &\quad \left(\int_0^L \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}}{\rho_0} ds + \int_0^L \psi'(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_b) \cdot \delta \boldsymbol{\sigma} ds \right). \end{aligned} \quad (20)$$

设定系统的平衡点为 $(\boldsymbol{\Omega}^e, \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}^e, \mathbf{r}_{\bar{m}}^e, \boldsymbol{\sigma}^e, \mathbf{r}_b^e)$, 令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^e &= J_s \boldsymbol{\Omega}^e - \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}}^e \times (\mathbf{r}_{\bar{m}}^e \times \boldsymbol{\Omega}^e) + \\ &\quad \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}}^e \times \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}^e + \int_0^L \mathbf{r}_b^e \times \boldsymbol{\sigma}^e ds. \end{aligned} \quad (21)$$

在平衡点 $D(H + \psi) = 0$, 下面求二阶变分 $D^2(H + \psi)$ 。首先考虑能量函数 H 的二阶变分, 对式(15)进行一阶变分, 可得到 f_1 的二阶变分:

$$\begin{aligned} D(Df_1) &= \delta^T \boldsymbol{\Omega} [\bar{m} \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) + J_s^T] \delta \boldsymbol{\Omega} + \\ &\quad \delta^T \boldsymbol{\Omega} [-\bar{m} \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}})] \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \boldsymbol{\Omega} [\bar{m}(-\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) + \\ &\quad \mathbf{S}^T(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}))] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} [\bar{m}(\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}))] \delta \boldsymbol{\Omega} + \\ &\quad \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} [\bar{m} \mathbf{I}] \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} [-\bar{m} \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [\bar{m}(-\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) - \delta^T(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) - \\ &\quad \mathbf{S}^T(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}))] \delta \boldsymbol{\Omega} + \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [\bar{m} \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega})] \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [\bar{m} \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) + k \mathbf{I}] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \\ &= (\delta^T \boldsymbol{\Omega} \quad \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\Omega} \\ \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \\ \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中,

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} J_s^T - \bar{m} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) & \bar{m} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) & \bar{m}(\mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) - \mathbf{S}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}})) \\ -\bar{m} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) & \bar{m} \mathbf{I} & \bar{m} \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) \\ \bar{m}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) + \mathbf{S}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}})) & -\bar{m} \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) & -\bar{m} \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) + k \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

类似地, 根据式(15)和(17), 并考虑边界条件, 可得到 f_2 和 f_3 的二阶变分:

$$\begin{cases} D(Df_2) = \int_0^L \frac{\delta \sigma \cdot \delta \sigma}{\rho_0} ds, \\ D(Df_3) = -\int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial^2 \delta \mathbf{r}_b}{\partial s^2} \cdot \delta \mathbf{r}_b ds = \int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial \delta \mathbf{r}_b}{\partial s} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{r}_b}{\partial s} ds. \end{cases} \quad (23)$$

设定 \mathbf{K} 为对角阵, 可采用 Pioncare 类不等式, 对式(23)的下界进行估计:

$$\int_0^L \mathbf{K} \frac{\partial \delta \mathbf{r}_b}{\partial s} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{r}_b}{\partial s} ds \geq c \int_0^L \mathbf{K} \delta \mathbf{r}_b \cdot \delta \mathbf{r}_b ds, \quad (24)$$

其中, $c = \pi^2 / (4L^2)$, 因此

$$\begin{aligned} D^2(H) &= D(Df_1) + D(Df_2) + D(Df_3) \\ &\geq \delta^T \boldsymbol{\Omega} [\bar{m} \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) + \mathbf{J}_s^T] \delta \boldsymbol{\Omega} + \\ &\quad \delta^T \boldsymbol{\Omega} [-\bar{m} \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}})] \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \boldsymbol{\Omega} [\bar{m} (-\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) + \\ &\quad \mathbf{S}^T(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}))] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} [\bar{m} (\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}))] \delta \boldsymbol{\Omega} + \\ &\quad \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} [\bar{m} \mathbf{I}] \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} [-\bar{m} \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [\bar{m} (-\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) - \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\bar{m}}) - \\ &\quad \mathbf{S}^T(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}))] \delta \boldsymbol{\Omega} + \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [\bar{m} \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega})] \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [\bar{m} \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) + k \mathbf{I}] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \int_0^L \delta^T \sigma \frac{1}{\rho_0} \mathbf{I} \delta \sigma ds + c \int_0^L \delta^T \mathbf{r}_b \mathbf{K} \delta \mathbf{r}_b ds. \end{aligned} \quad (25)$$

下面考虑表达式 Casimir 函数二阶变分, 对应的表达式为

$$\begin{aligned} D^2\psi(C) &= (2\psi'' \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{a}) \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{a} + \psi' \delta \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{a} + \psi' \mathbf{a} \cdot D(\delta \mathbf{a}) \\ &= (2\psi'' \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \psi' \mathbf{I}) (\mathbf{J}_s \delta \boldsymbol{\Omega} - \bar{m} \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) - \\ &\quad \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) - \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \delta \boldsymbol{\Omega}) + \\ &\quad \bar{m} \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \int_0^L \delta \mathbf{r}_b \times \boldsymbol{\sigma} ds + \\ &\quad \int_0^L \mathbf{r}_b \times \delta \boldsymbol{\sigma} ds)^2 + \psi' \mathbf{a} \cdot (-2\bar{m} \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) - \\ &\quad 2\bar{m} \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \delta \boldsymbol{\Omega}) - 2\bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \delta \boldsymbol{\Omega}) + \\ &\quad 2\bar{m} \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + 2 \int_0^L \delta \mathbf{r}_b \times \delta \boldsymbol{\sigma} ds), \end{aligned} \quad (26)$$

展开式(26)右端的两项, 可得

$$\begin{aligned} &-\delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} \bar{m} \psi' [\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_{\bar{m}})] \delta \boldsymbol{\Omega} - \\ &\quad \delta^T \boldsymbol{\Omega} \bar{m} \psi' [\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\mathbf{a}) + \mathbf{S}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_{\bar{m}})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [\psi' \bar{m} \mathbf{S}^T(\mathbf{a})] \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} [\psi' \bar{m} \mathbf{S}(\mathbf{a})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [2\psi' \bar{m} \mathbf{S}^T(\mathbf{a}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \int_0^L \delta^T \mathbf{r}_b [\psi' \mathbf{S}^T(\mathbf{a})] \delta \sigma ds + \int_0^L \delta^T \sigma [\psi' \mathbf{S}(\mathbf{a})] \delta \mathbf{r}_b ds. \end{aligned} \quad (27)$$

因此, 式(25)可重新表示为

$$\begin{aligned} D^2\psi(C) &= (2\psi'' \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{a}) \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{a} + \psi' \delta \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{a} + \psi' \mathbf{a} \cdot D(\delta \mathbf{a}) \\ &= (2\psi'' \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \psi' \mathbf{I}) (\mathbf{J}_s \delta \boldsymbol{\Omega} - \bar{m} \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) - \\ &\quad \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) - \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times (\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \delta \boldsymbol{\Omega}) + \bar{m} \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \\ &\quad \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}} \times \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \int_0^L \delta \mathbf{r}_b \times \boldsymbol{\sigma} ds + \int_0^L \mathbf{r}_b \times \delta \boldsymbol{\sigma} ds)^2 - \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} \bar{m} \psi' [\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_{\bar{m}})] \delta \boldsymbol{\Omega} - \\ &\quad \delta^T \boldsymbol{\Omega} \bar{m} \psi' [\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\mathbf{a}) + \mathbf{S}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_{\bar{m}})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [\psi' \bar{m} \mathbf{S}^T(\mathbf{a})] \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} [\psi' \bar{m} \mathbf{S}(\mathbf{a})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}} [2\psi' \bar{m} \mathbf{S}^T(\mathbf{a}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \int_0^L \delta^T \mathbf{r}_b [\psi' \mathbf{S}^T(\mathbf{a})] \delta \sigma ds + \int_0^L \delta^T \sigma [\psi' \mathbf{S}(\mathbf{a})] \delta \mathbf{r}_b ds. \end{aligned} \quad (28)$$

由式(25)和(28)可得

$$\begin{aligned} D^2(H + \psi) &\geq (\delta^T \boldsymbol{\Omega} \quad \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{R}_1 \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\Omega} \\ \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \\ \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \end{pmatrix} + \\ &\quad \int_0^L (\delta^T \sigma \quad \delta^T \mathbf{r}_b) \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} \delta \sigma \\ \delta \mathbf{r}_b \end{pmatrix} ds + \\ &\quad (2\psi'' \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \psi' \mathbf{I}) ([\mathbf{J}_s - \\ &\quad \bar{m} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}})] \delta \boldsymbol{\Omega} + \bar{m} [\mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) + \\ &\quad \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{S}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}})] \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\ &\quad \bar{m} \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}}) \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} - \int_0^L \mathbf{S}(\sigma) \delta \mathbf{r}_b ds + \\ &\quad \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b) \delta \sigma ds)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

其中,

$$R_1 = \begin{pmatrix} J_s^T - \bar{m}S^T(r_{\bar{m}})S(r_{\bar{m}}) & \bar{m}S(r_{\bar{m}}) & V_1 \\ -\bar{m}(S(r_{\bar{m}})) & \bar{m}I & \bar{m}S(\Omega) + \psi' \bar{m}S(\alpha) \\ V_2 & -\bar{m}S(\Omega) - \psi' \bar{m}S(\alpha) & \bar{m}S^T(\Omega)S(\Omega) + kI - 2\psi' \bar{m}S(\alpha)S(\Omega) \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \bar{m}(S(r_{\bar{m}})S(\Omega) - S(\Omega \times r_{\bar{m}}) - S(\dot{r}_{\bar{m}})) - \bar{m}\psi'(-S(r_{\bar{m}})S(\alpha) + S(\alpha \times r_{\bar{m}})),$$

$$V_2 = \bar{m}(S(\Omega)S(r_{\bar{m}}) + S(\Omega \times r_{\bar{m}}) + S(\dot{r}_{\bar{m}})) - \bar{m}\psi'(-S(\alpha)S(r_{\bar{m}}) - S(\alpha \times r_{\bar{m}})),$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} I & -\psi' S^T(\alpha) \\ \psi' S^T(\alpha) & cK \end{pmatrix}.$$

令 $P = (2\psi' \alpha \otimes \alpha + \psi' I)$, 展开式(29)右端第三项, 可得

$$P([J_s - \bar{m}S(r_{\bar{m}})S(r_{\bar{m}})]\delta\Omega + \bar{m}[S(r_{\bar{m}} \times \Omega) + S(r_{\bar{m}})S(\Omega) - S(\dot{r}_{\bar{m}})]\delta r_{\bar{m}} + \bar{m}S(r_{\bar{m}})\delta\dot{r}_{\bar{m}})^2 +$$

$$P\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right)^2 + 2P([J_s - \bar{m}S(r_{\bar{m}})S(r_{\bar{m}})]\delta\Omega + \bar{m}[S(r_{\bar{m}} \times \Omega) +$$

$$S(r_{\bar{m}})S(\Omega) - S(\dot{r}_{\bar{m}})]\delta r_{\bar{m}} + \bar{m}S(r_{\bar{m}})\delta\dot{r}_{\bar{m}}) \cdot \left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right). \quad (30)$$

展开式(30)中的第一项, 可得

$$P([J_s - \bar{m}S(r_{\bar{m}})S(r_{\bar{m}})]\delta\Omega + \bar{m}S(r_{\bar{m}})\delta\dot{r}_{\bar{m}} + \bar{m}[S(r_{\bar{m}} \times \Omega) + S(r_{\bar{m}})S(\Omega) - S(\dot{r}_{\bar{m}})]\delta r_{\bar{m}})^2$$

$$= (\delta^T \Omega \quad \delta^T \dot{r}_{\bar{m}} \quad \delta^T r_{\bar{m}}) R_2 \begin{pmatrix} \delta\Omega \\ \delta\dot{r}_{\bar{m}} \\ \delta r_{\bar{m}} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中, 矩阵的 R_2 的表达式为

$$R_2 = \begin{pmatrix} [J_s^T - \bar{m}S^T(r_{\bar{m}})S^T(r_{\bar{m}})]P^T[J_s - \bar{m}S(r_{\bar{m}})S(r_{\bar{m}})] \\ \bar{m}[J_s^T - \bar{m}S^T(r_{\bar{m}})S^T(r_{\bar{m}})]P^T S(r_{\bar{m}}) \\ [J_s^T - \bar{m}S^T(r_{\bar{m}})S^T(r_{\bar{m}})]P^T \bar{m}[S(r_{\bar{m}} \times \Omega) + S(r_{\bar{m}})S(\Omega) - S(\dot{r}_{\bar{m}})] \\ \bar{m}S^T(r_{\bar{m}})P^T[J_s - \bar{m}S(r_{\bar{m}})S(r_{\bar{m}})] \\ \bar{m}S^T(r_{\bar{m}})P^T \bar{m}S(r_{\bar{m}}) \\ \bar{m}S^T(r_{\bar{m}})P^T \bar{m}[S(r_{\bar{m}} \times \Omega) + S(r_{\bar{m}})S(\Omega) - S(\dot{r}_{\bar{m}})] \\ [S^T(r_{\bar{m}} \times \Omega) + S^T(\Omega)S^T(r_{\bar{m}}) - S^T(\dot{r}_{\bar{m}})]P^T \bar{m}[J_s - \bar{m}S(r_{\bar{m}})S(r_{\bar{m}})] \\ \bar{m}[S^T(r_{\bar{m}} \times \Omega) + S^T(\Omega)S^T(r_{\bar{m}}) - S^T(\dot{r}_{\bar{m}})]P^T \bar{m}S(r_{\bar{m}}) \\ \bar{m}[S^T(r_{\bar{m}} \times \Omega) + S^T(\Omega)S^T(r_{\bar{m}}) - S^T(\dot{r}_{\bar{m}})]P^T \bar{m}[S(r_{\bar{m}} \times \Omega) + S(r_{\bar{m}})S(\Omega) - S(\dot{r}_{\bar{m}})] \end{pmatrix}.$$

令

$$R_3 = R_1 + R_2 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & 0 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} + R_4, \quad (32)$$

其中,

$$R_{11} = [J_s^T - \bar{m}S(r_m)S(r_m)][P^T J_s - P^T \bar{m}S(r_m)S(r_m) + I],$$

$$R_{12} = -\bar{m}S(r_m)[P^T J_s - P^T \bar{m}S(r_m)S(r_m) - I],$$

$$R_{13} = \bar{m}(S(r_m)S(\Omega) - S(\Omega \times r_m) - S(\dot{r}_m)) -$$

$$\bar{m}\psi'(-S(r_m)S(\alpha) + S(\alpha \times r_m)) +$$

$$\bar{m}[-S(r_m \times \Omega) + S(\Omega)S(r_m) +$$

$$S(\dot{r}_m)]P^T[J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)],$$

$$R_{21} = \bar{m}[J_s^T P^T - \bar{m}S(r_m)S(r_m)P^T - I]S(r_m),$$

$$R_{22} = \bar{m}(I - S(r_m)P^T \bar{m}S(r_m)),$$

$$R_{23} = \bar{m}S(\Omega) + \psi' \bar{m}S(\alpha) + \bar{m}[-S(r_m \times \Omega) +$$

$$S(\Omega)S(r_m) + S(\dot{r}_m)]P^T \bar{m}S(r_m),$$

$$R_{31} = \bar{m}(S(\Omega)S(r_m) + S(\Omega \times r_m) + S(\dot{r}_m)) -$$

$$\bar{m}\psi'[-S(\alpha)S(r_m) - S(\alpha \times r_m)] +$$

$$[J_s^T - \bar{m}S(r_m)S(r_m)]P^T \bar{m}[S(r_m \times \Omega) +$$

$$S(r_m)S(\Omega) - S(\dot{r}_m)],$$

$$R_{32} = -\bar{m}S(\Omega) - \psi' \bar{m}S(\alpha) - \bar{m}S(r_m)P^T \bar{m}[S(r_m \times \Omega) +$$

$$S(r_m)S(\Omega) - S(\dot{r}_m)],$$

$$R_{33} = -\bar{m}S(\Omega)S(\Omega) + kI - 2\psi' \bar{m}S(\alpha)S(\Omega) +$$

$$\bar{m}[-S(r_m \times \Omega) + S(\Omega)S(r_m) +$$

$$S(\dot{r}_m)]P^T \bar{m}[S(r_m \times \Omega) + S(r_m)S(\Omega) - S(\dot{r}_m)].$$

对于式(30)中的第 3 项, 有

$$2P([J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)]\delta\Omega + \bar{m}S(r_m)\delta\dot{r}_m +$$

$$\bar{m}[S(r_m \times \Omega) + S(r_m)S(\Omega) - S(\dot{r}_m)]\delta r_m \cdot$$

$$\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right)$$

$$= 2P[J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)]\delta\Omega \cdot \left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds +$$

$$\int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right) + 2P\bar{m}S(r_m)\delta\dot{r}_m \cdot$$

$$\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right) +$$

$$2P\bar{m}[S(r_m \times \Omega) + S(r_m)S(\Omega) - S(\dot{r}_m)]\delta r_m \cdot$$

$$\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right). \quad (33)$$

下面对式(33)中第一项进行处理, 合并该项及式(30)中 $\delta\Omega$ 的平方项, 得

$$\delta^T \Omega R_{11} \delta\Omega + 2P[J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)]\delta\Omega \cdot$$

$$\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right)$$

$$= R_{11}^T \delta\Omega \cdot \delta\Omega + 2P[J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)]\delta\Omega \cdot$$

$$\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right). \quad (34)$$

令

$$\begin{cases} R_{11}^T = M_1^T M_1, \\ P[J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)] = N_1^T M_1, \end{cases} \quad (35)$$

则式(34)可表示为

$$R_{11}^T \delta\Omega \cdot \delta\Omega + 2P[J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)]\delta\Omega \cdot$$

$$\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right)$$

$$= M_1^T M_1 \delta\Omega \cdot \delta\Omega + 2N_1^T M_1 \delta\Omega \cdot$$

$$\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right)$$

$$= \left\| M_1 \delta\Omega + N_1 \left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right) \right\|^2 -$$

$$N_1^T N_1 \left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right) \cdot$$

$$\left(-\int_0^L S(\sigma)\delta r_b ds + \int_0^L S(r_b)\delta\sigma ds\right), \quad (36)$$

其中,

$$N_1^T N_1 = N_1^T M_1 (M_1^T M_1)^{-1} (N_1^T M_1)^T$$

$$= P[J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)](R_{11}^T)^{-1} \cdot$$

$$[P[J_s - \bar{m}S(r_m)S(r_m)]]^T. \quad (37)$$

类似地, 可对式(33)中第二项和第三项进行处理, 令

$$\begin{cases} R_{22}^T = M_2^T M_2, \\ \bar{m}PS(r_m) = N_2^T M_2, \\ N_2^T N_2 = \bar{m}PS(r_m) \cdot (R_{22}^T)^{-1} \bar{m}[PS(r_m)]^T, \\ R_{33}^T = M_3^T M_3, \\ P[S(r_m \times \Omega) + S(r_m)S(\Omega) - S(\dot{r}_m)] = N_3^T M_3, \\ N_3^T N_3 = \bar{m}P[S(r_m \times \Omega) + S(r_m)S(\Omega) - S(\dot{r}_m)](R_{33}^T)^{-1} \\ \quad \bar{m}[P(S(r_m \times \Omega) + S(r_m)S(\Omega) - S(\dot{r}_m))]^T, \end{cases} \quad (38)$$

类似于式(36), 有

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R}_{22}^T \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + 2\mathbf{P}\bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}})\delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \cdot \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \\
& = \left\| \mathbf{M}_2 \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \mathbf{N}_2 \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \right\|^2 - \\
& \quad \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \cdot \\
& \quad \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right), \\
& \mathbf{R}_{33}^T \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + 2\mathbf{P}\bar{m}[\mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}})\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) - \\
& \quad \mathbf{S}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}})]\delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \cdot \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \\
& = \left\| \mathbf{M}_3 \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \mathbf{N}_3 \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \right\|^2 - \\
& \quad \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3 \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \cdot \\
& \quad \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right), \quad (39)
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R}_{11}^T \delta \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} + 2\mathbf{P}[\mathbf{J}_s - \bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}})\mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}})]\delta \boldsymbol{\Omega} \cdot \\
& \quad \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) + \mathbf{R}_{22}^T \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \\
& \quad 2\mathbf{P}\bar{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}})\delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \cdot \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) + \\
& \quad \mathbf{P} \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right)^2 + \mathbf{R}_{33}^T \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \\
& \quad 2\mathbf{P}\bar{m}[\mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}} \times \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\bar{m}})\mathbf{S}(\boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{S}(\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}})]\delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \cdot \\
& \quad \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \\
& = \left\| \mathbf{M}_1 \delta \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{N}_1 \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \right\|^2 + \\
& \quad \left\| \mathbf{M}_2 \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} + \mathbf{N}_2 \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \right\|^2 + \\
& \quad \left\| \mathbf{M}_3 \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} + \mathbf{N}_3 \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \right\|^2 - \\
& \quad (\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3 - \mathbf{P}).
\end{aligned}$$

$$\left\| \left(-\int_0^L \mathbf{S}(\sigma)\delta \mathbf{r}_b ds + \int_0^L \mathbf{S}(\mathbf{r}_b)\delta \sigma ds \right) \right\|^2. \quad (40)$$

式(40)右端前三项显然为正, 下面考虑右端第四项, 可表示为

$$\begin{aligned}
& -\int_0^L \int_0^L \begin{bmatrix} \delta^T \mathbf{r}_b(s) & \delta^T \boldsymbol{\sigma}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\sigma}(s)) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_b(s)) \end{bmatrix} \cdot \\
& \quad ((\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3) - \mathbf{P}^T) \cdot \\
& \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}(s)) & \mathbf{S}(\mathbf{r}_b(p)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_b(p) \\ \delta \boldsymbol{\sigma}(p) \end{bmatrix} ds dp \\
& = -\int_0^L \int_0^L \begin{bmatrix} \delta^T \mathbf{r}_b(s) & \delta^T \boldsymbol{\sigma}(s) \end{bmatrix} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_b(p) \\ \delta \boldsymbol{\sigma}(p) \end{bmatrix} ds dp, \quad (41)
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} = & \begin{bmatrix} \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\sigma}(s))((\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3) - \mathbf{P}^T)\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}(p)) \\ -\mathbf{S}^T(\mathbf{r}_b(s))((\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3) - \mathbf{P}^T)\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}(p)) \\ -\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\sigma}(s))((\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3) - \mathbf{P}^T)\mathbf{S}(\mathbf{r}_b(p)) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_b(s))((\mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3) - \mathbf{P}^T)\mathbf{S}(\mathbf{r}_b(p)) \end{bmatrix}. \quad (42)
\end{aligned}$$

设定 λ^2 为矩阵 \mathbf{U} 的最大特征值, 令 $\bar{\lambda}^2 = \int_0^L \lambda^2(s)ds$, 则根据式(41)可得

$$\begin{aligned}
& -\int_0^L \int_0^L \begin{bmatrix} \delta^T \mathbf{r}_b(s) & \delta^T \boldsymbol{\sigma}(s) \end{bmatrix} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}_b(p) \\ \delta \boldsymbol{\sigma}(p) \end{bmatrix} ds dp \\
& \geq -\bar{\lambda}^2 \int_0^L \delta^T \mathbf{r}_b(s)\delta \mathbf{r}_b(s)ds - \bar{\lambda}^2 \int_0^L \delta^T \boldsymbol{\sigma}(s)\delta \boldsymbol{\sigma}(s)ds, \quad (43)
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
& -\bar{\lambda}^2 \int_0^L \delta^T \mathbf{r}_b(s)\delta \mathbf{r}_b(s)ds - \bar{\lambda}^2 \int_0^L \delta^T \boldsymbol{\sigma}(s)\delta \boldsymbol{\sigma}(s)ds + \\
& \quad \int_0^L (\delta^T \boldsymbol{\sigma} \quad \delta^T \mathbf{r}_b) \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \mathbf{r}_b \end{pmatrix} ds \\
& = \int_0^L (\delta^T \boldsymbol{\sigma} \quad \delta^T \mathbf{r}_b) \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} \mathbf{I} - \bar{\lambda}^2 \mathbf{I} & -\psi' \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\alpha}) \\ \psi' \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\alpha}) & c\mathbf{K} - \bar{\lambda}^2 \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \mathbf{r}_b \end{pmatrix} ds \\
& = \int_0^L (\delta^T \boldsymbol{\sigma} \quad \delta^T \mathbf{r}_b) \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \mathbf{r}_b \end{pmatrix} ds. \quad (44)
\end{aligned}$$

因此, 式(29)可表示为

$$D^2(H + \psi) \geq (\delta^T \boldsymbol{\Omega} \quad \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{R}_4 \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\Omega} \\ \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \\ \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \end{pmatrix} + \int_0^L (\delta^T \boldsymbol{\sigma} \quad \delta^T \mathbf{r}_b) \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \mathbf{r}_b \end{pmatrix} ds. \quad (45)$$

由于系统的平衡点为 $(\boldsymbol{\Omega}^e, \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}^e, \mathbf{r}_{\bar{m}}^e, \boldsymbol{\sigma}^e, \mathbf{r}_b^e)$, 且

$$\boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{J}_s \boldsymbol{\Omega}^e - \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}}^e \times (\mathbf{r}_{\bar{m}}^e \times \boldsymbol{\Omega}^e) + \bar{m} \mathbf{r}_{\bar{m}}^e \times \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}^e + \int_0^L \mathbf{r}_b^e \times \boldsymbol{\sigma}^e ds, \quad (46)$$

令 \mathbf{R}_4^e 和 \mathbf{T}_2^e 分别表示矩阵 \mathbf{R}_4 和 \mathbf{T}_2 在平衡点的值, ψ_e'' 和 ψ_e' 分别表示 ψ'' 和 ψ' 在平衡点的值, 则式(46)在平衡点的值为

$$D^2(H + \psi)_{(\boldsymbol{\Omega}^e, \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}^e, \mathbf{r}_{\bar{m}}^e, \boldsymbol{\sigma}^e, \mathbf{r}_b^e)} \geq (\delta^T \boldsymbol{\Omega} \quad \delta^T \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \quad \delta^T \mathbf{r}_{\bar{m}}) \mathbf{R}_4^e \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\Omega} \\ \delta \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} \\ \delta \mathbf{r}_{\bar{m}} \end{pmatrix} + \int_0^L (\delta^T \boldsymbol{\sigma} \quad \delta^T \mathbf{r}_b) \mathbf{T}_2^e \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\sigma} \\ \delta \mathbf{r}_b \end{pmatrix} ds. \quad (47)$$

根据表达式(47), 可得如下定理。

定理 若矩阵 \mathbf{R}_4 和 \mathbf{T}_2 在平衡点 $(\boldsymbol{\Omega}^e, \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}^e, \mathbf{r}_{\bar{m}}^e, \boldsymbol{\sigma}^e, \mathbf{r}_b^e)$ 是正定的, 则刚-液-柔耦合航天器系统(式(10))是非线性稳定的, 其中,

$$\mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{21} & 0 & \mathbf{R}_{23} \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} \mathbf{I} - \bar{\lambda}^2 \mathbf{I} & -\psi' \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\alpha}) \\ \psi' \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\alpha}) & c\mathbf{K} - \bar{\lambda}^2 \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

3 耦合系统平凡解和数值仿真

3.1 耦合系统平凡解

下面考虑刚-液-柔耦合航天器系统的平凡解(即系统绕着线性剪切梁的轴向进行旋转), 设定该情况下平衡点的形式为 $(\boldsymbol{\Omega}^e, \dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}}^e, \mathbf{r}_{\bar{m}}^e, \boldsymbol{\sigma}^e, \mathbf{r}_b^e)$, 系统的角速度为 $\boldsymbol{\Omega}^e = \omega_3^e \mathbf{e}_3$, 表示角速度沿着第三惯性主轴方向。由于梁是未拉伸的, 则有 $\mathbf{r}_b^e = (b+s)\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{0}$, $0 \leq s \leq l$ 。晃动质量 \bar{m} 的平衡解为 $\mathbf{r}_{\bar{m}} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{r}}_{\bar{m}} = \mathbf{0}$, 对应于晃动质量块静止在平衡位置, 不发生运动。平衡点位置的角动量为 $\boldsymbol{\alpha}^e = j_{33} \omega_3^e \mathbf{e}_3$, 根据上式可得到 ψ' 和 ψ'' 在平衡点的值为

$$\begin{cases} \psi'(\|\boldsymbol{\alpha}^e\|^2) = -\frac{\boldsymbol{\alpha}^e \cdot \boldsymbol{\Omega}^e}{\|\boldsymbol{\alpha}^e\|^2} = -\frac{1}{j_{33}}, \\ \psi''(\|\boldsymbol{\alpha}^e\|^2) = \frac{\boldsymbol{\Omega}^e \cdot \boldsymbol{\alpha}^e}{2\|\boldsymbol{\alpha}^e\|^4} = \frac{1}{2(j_{33})^3(\omega_3^e)^2}. \end{cases} \quad (48)$$

矩阵 \mathbf{T}_2 在平衡点的表达式为

$$\mathbf{T}_2^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_0} - \lambda_1 \int_0^L r_b^2 ds & 0 & 0 & 0 & \omega_3^e & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0} - \lambda_2 \int_0^L r_b^2 ds & 0 & -\omega_3^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_3^e & 0 & ck_x & 0 & 0 \\ \omega_3^e & 0 & 0 & 0 & ck_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ck_z \end{pmatrix}, \quad (49)$$

其中,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{j_{33} - j_{22} - \bar{m}a_1^2 - m_F a_2^2} + \frac{\bar{m}a_1^2}{j_{33}(j_{33} - \bar{m}a_1^2)} + \frac{\bar{m}^2 a_1^2 (\omega_3^e)^2}{j_{33}(kj_{33} - \bar{m}^2 a_1^2 (\omega_3^e)^2 - \bar{m}(\omega_3^e)^2 j_{33})}, \\ \lambda_2 = \frac{1}{j_{33} - j_{11} - \bar{m}a_1^2 - m_F a_2^2} + \frac{\bar{m}a_1^2}{j_{33}(j_{33} - \bar{m}a_1^2)} + \frac{\bar{m}^2 a_1^2 (\omega_3^e)^2}{j_{33}(kj_{33} - \bar{m}^2 a_1^2 (\omega_3^e)^2 - \bar{m}(\omega_3^e)^2 j_{33})}. \end{cases} \quad (50)$$

为使得矩阵 \mathbf{T}_2^e 为正定的,则需要满足以下条件:

$$\begin{cases} ck_x \left(\frac{1}{\rho_0} - \lambda_1 \int_0^L r_b^2 ds \right) > (\omega_3^e)^2, \\ ck_y \left(\frac{1}{\rho_0} - \lambda_2 \int_0^L r_b^2 ds \right) > (\omega_3^e)^2, \\ \lambda_1 < \frac{1}{\rho_0 \int_0^L r_b^2 ds}, \lambda_2 < \frac{1}{\rho_0 \int_0^L r_b^2 ds}. \end{cases} \quad (51)$$

考虑矩阵 \mathbf{R}_4 在平衡点的形式,可得到矩阵 \mathbf{R}_4^e 的各阶顺序主子式均为零,因此,矩阵 \mathbf{R}_4^e 为半正定。因此,若满足式(51),则耦合航天器系统为非线性稳定的。式(51)的前两个条件是系统稳定自旋的条件,与仅考虑刚体自旋稳定性的条件相比,由于液体晃动和柔性附件的影响,对应的转动惯量需要进行修正。当不考虑液体和柔性附件的影响时,式(51)退化为刚体自旋稳定的条件。式(51)的后两个条件是对系统转速的限制,表明刚体的角频率不能超过横截梁的修正特征频率。在不考虑液体晃动的情况下,稳定性条件(式(51))与文献[6]中含有柔性附件的刚体稳定性条件一致。

3.2 数值仿真

选取刚体航天器的惯性矩阵的参数 $j_{11}=420 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $j_{22}=385 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 系统的角速度为 ω_3^e ; 未晃动燃料的质量为 $m_F=152.12 \text{ kg}$; 参与晃动的液体质量 $\bar{m}=60.92 \text{ kg}$, $a_1=-0.88 \text{ m}$, $a_2=-0.96 \text{ m}$; 弹簧的刚度系数为 $k=220.21 \text{ N/m}$; 单位长度剪切梁的质量 $\rho_0=0.3768 \text{ kg/m}$; 梁的弹性系数为 $k_x=k_y=k_z=84 \text{ N/m}$; 柔性附件与刚体的连接点在本体坐标下为 $\mathbf{b}=(0, 0, b)^T$, $b=1.428 \text{ m}$ 。根据稳定性条件(式(51)),给出耦合航天器系统在参数空间中的稳定和不稳定区域,其中参数为刚体航天器转动惯量 j_{33} 和梁的长度 L 。

图3中角速度为 $\omega_3^e=1.0 \text{ rad/s}$, 阴影部分为稳定区域。从图3可看出,航天器自旋轴的转动惯量增大会增加航天器姿态的稳定性,而附件长度的增加会将降低航天器姿态的稳定性。

图4给出角速度 ω_3^e 的变化对系统稳定性的影响,阴影部分为稳定区域。从图4可以看出,自旋角速度的增加会降低系统的稳定性。

下面考虑储液腔内液体燃料的变化,即充液比的改变对耦合系统稳定性的影响。航天器刚体的惯

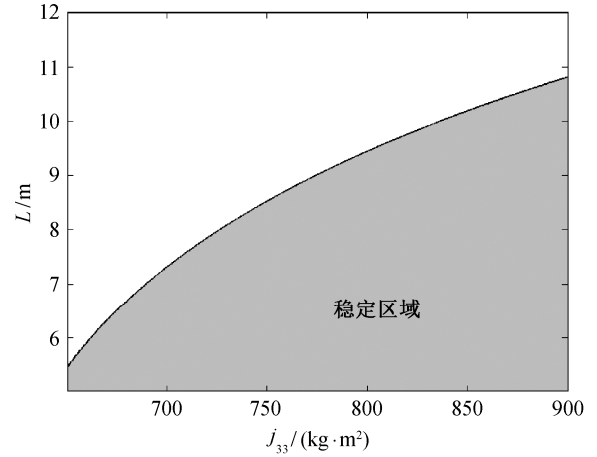


图3 参数空间(j_{33} , L)中稳定区域和不稳定区域的分布
Fig. 3 Distribution of stable and unstable region in parameter space (j_{33} , L)

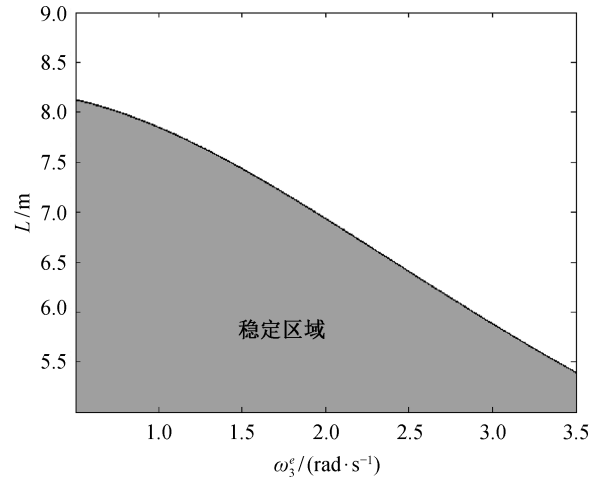


图4 参数空间(ω_3^e , L)中稳定区域的分布
Fig. 4 Distribution of stable region in parameter space (ω_3^e , L)

性矩阵

$$\mathbf{J}_H = \begin{bmatrix} 420 & 0 & 0 \\ 0 & 385 & 0 \\ 0 & 0 & 520 \end{bmatrix} (\text{kg} \cdot \text{m}^2),$$

系统的角速度为 ω_3^e , 梁的密度为 $\rho=300 \text{ kg/m}^3$, 剪切梁的弹性系数为 $k_x=k_y=k_z=84 \text{ N/m}$, 梁的长为 $L=6.4 \text{ m}$, 半径为 $r=0.02 \text{ m}$, $b=1.428 \text{ m}$, 梁的单位长度的质量为 $\rho_0=0.3768 \text{ kg/m}$ 。设定储液腔的几何形状为球形, 半径 $R=0.4135 \text{ m}$, 储液腔内液体燃料最大质量 $m_{\text{liquid}}=300 \text{ kg}$, 储液腔内实际燃料质量为 $m_{\text{total}}=m_{\text{slosh}}+m_{\text{rest}}$, 其中 m_{slosh} , m_{rest} 分别表示晃动液

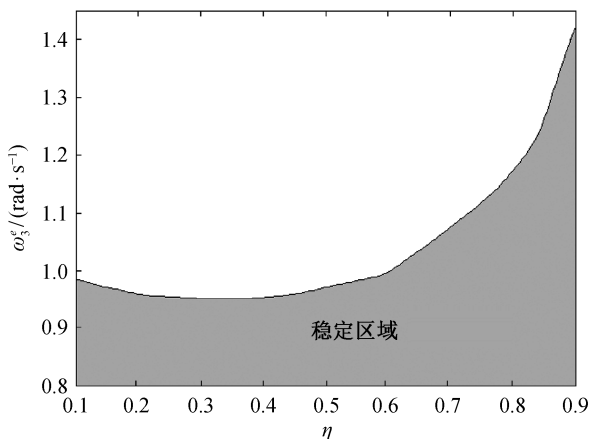

 图 5 参数空间 (η, ω_s^c) 中稳定区域的分布

 Fig. 5 Distribution of stable region in parameter space (η, ω_s^c)

体质量和静止液体质量。令 $\eta = m_{\text{total}}/m_{\text{liquid}}$ 表示储液腔的充液比 ($0 \leq \eta \leq 1$)。通过文献[10–11]可以得到 $m_{\text{slosh}}/m_{\text{total}}$, $m_{\text{rest}}/m_{\text{total}}$, a_1 , a_2 随充液比的变化, 结合等效晃动质量可得到等效模型弹簧的刚度。图 5 给出了柔性附件和刚体航天器在参数不变的情况下, $0.1 \leq \eta \leq 0.9$ 时稳定区域的分布。从图 5 可以看出, 随着充液比的增加, 稳定性区域呈现先减小后增加的趋势。

4 结论

耦合航天器稳定性分析在航天器动力学与控制研究中起着重要作用。本文针对含有柔性附件的充液航天器系统进行稳定性分析。首先, 给出刚–液–柔耦合航天器的力学模型, 通过分析各个部分的能量函数, 得到系统的总能量函数和 Casimir 函数; 接着, 计算能量–Casimir 函数的一阶变分, 得到耦合系统平衡点所满足的条件, 然后计算能量–Casimir 函数的二阶变分, 得到耦合系统的非线性稳定性条件; 最后, 给出绕三轴稳定自旋的情况, 得到非线性稳定性条件, 并通过数值仿真验证了相关结论。研究结果显示, 刚体的转动惯量、剪切梁

的长度以及储液腔的充液比对系统稳定性有较大的影响。

参考文献

- [1] 岳宝增, 杨旦旦, 吴文军. 微重力环境下刚液耦合系统液体晃动混沌现象研究. 动力学与控制学报, 2013, 11(4): 306–313
- [2] 岳宝增, 宋晓娟. 具有刚–柔–液–控耦合的航天器动力学研究进展. 力学进展, 2013, 43(1): 163–173
- [3] Krishnaprasad P S, Marsden J E. Hamiltonian structures and stability for rigid bodies with flexible attachments. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1987, 98(1): 71–93
- [4] Posbergh T A, Krishnaprasad P S, Marsden J E. Stability analysis of a rigid body with a flexible attachment using the energy-Casimir method. Contemp Math, 1987, 68: 253–273
- [5] Kane T R, Ryan R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1987, 10(2): 139–151
- [6] Bloch A M. Stability analysis of a rotating flexible system. Acta Applicandae Mathematica, 1989, 15(3): 211–234
- [7] 岳宝增, Ahmad S, 宋晓娟. 充液航天器姿态稳定分析的 Casimir 方法. 中国科学: 物理学力学天文学, 2013, 43(4): 401–406
- [8] Ahmad S, Yue B Z. Bifurcation and stability analysis of the Hamiltonian Casimir model of liquid sloshing. Chinese Physics Letters, 2012, 29(6): 060501
- [9] 杨旦旦, 岳宝增. 一类带柔性附件充液航天器姿态机动控制. 力学学报, 2012, 44(2): 415–424
- [10] Bauer H F, Eidel W. Liquid oscillations in a prolate spheroidal container. Ingenieur-Archiv, 1989, 59(5): 371–381
- [11] Dodge F T. The new dynamic behavior of liquids in moving containers [R]. Hampton, VA: NASA STI/Recon Technical Report N, 2000