北京大学学报(自然科学版) 第 52 卷 第 4 期 2016 年 7 月
Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 52, No. 4 (July 2016)
doi: 10.13209/j.0479-8023.2016.078

Nielsen 方程的两类广义梯度表示

梅凤翔[1,†] 吴惠彬[2] 李彦敏[3]

1. 北京理工大学宇航学院，北京 100081; 2. 北京理工大学数学学院，北京 100081; 3. 商丘师范学院物理与电气信息学院，商丘 476000; † E-mail: meifx@bit.edu.cn

摘要 提出两类广义梯度系统，并研究其性质。给出 Nielsen 方程成为广义梯度系统的条件。利用广义梯度系统的性质，研究 Nielsen 方程解的稳定性。举例说明结果的应用。

关键词 Nielsen 方程; 广义梯度系统; 稳定性

中图分类号 O316

Two Kinds of Gradient Representations for Nielsen Equations

MEI Fengxiang[1,†], WU Huibin[2], LI Yanmin[3]

1. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081; 2. School of Mathematics, Beijing Institute of technology, Beijing 100081; 3. Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Normal College, Shangqiu 476000; † E-mail: meifx@bit.edu.cn

Abstract The two kinds of generalized gradient systems are proposed and the characteristics of the two systems are studied. The conditions under which the Nielsen equations can be considered as one of the two generalized gradient systems are obtained. The characteristics of the generalized gradient systems can be used to study the stability of solution of the Nielsen equations. Some examples are given to illustrate the application of the results.

Key words Nielsen equation; generalized gradient system; stability

1935 年哥本哈根高等技术学校理论力学教授 Nielsen[1]给出一类完整系统的动力学方程，后人称其为 Nielsen 方程。文献[2–7]推广了 Nielsen 方程。然而，至今没有一个有效方法来积分 Nielsen 方程，或研究其解的稳定性。分析力学一般都研究力学系统的稳定性，如文献[8–9]。梯度系统特别适合用 Lyapunov 函数来研究[10]。McLachlan 等[11]研究了各类梯度系统。有关约束力学系统与梯度系统关系的研究已有一些结果，如文献[12–15]。但是，在这些研究中，梯度系统中的矩阵和函数都不含时间。如果梯度系统中的矩阵或函数包含时间 t，则称其为广义梯度系统。有两类广义梯度系统对研究系统解的稳定性特别有用：一类是广义斜梯度系统，另一类是具有对称负定矩阵的广义梯度系统。本文将完整系统和非完整系统的 Nielsen 方程在一定条件下化成这两类广义梯度系统，并利用广义梯度系统的性质来研究 Nielsen 方程解的稳定性。

1 两类广义梯度系统

一类是广义斜梯度系统，其微分方程为

$$\dot{x}_i = b_{ij}(t, \boldsymbol{x})\frac{\partial V(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_j} \quad (i,\ j = 1, 2, ..., m), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$，$b_{ij}(t, \boldsymbol{x}) = -b_{ji}(t, \boldsymbol{x})$，这里及以后同一项中相同的活动指标表示对其求和。如果 b_{ij} 和 V 都不含时间，那么式(1)给出文献[2]的斜梯度系统。按方程(1)求 $\dot{V}$，得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_i} b_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial V}{\partial t}。 \tag{2}$$

因此，若 V 可以成为 Lyapunov 函数，例如，在有解

国家自然科学基金(10932002,11272050, 11372169)资助
收稿日期: 2015–10–07; 修回日期: 2016–02–07; 网络出版时间: 2016–07–12

的邻域内是正定的，且有 $\partial V/\partial t<0$，则由 Lyapunov 定理知，解是稳定的。这个重要性质可用来研究可化成广义斜梯度系统的非定常力学系统的解的稳定性。

另一类重要的广义梯度系统是具有对称负定矩阵的广义梯度系统，其微分方程为

$$\dot{x}_i = S_{ij}(t,\boldsymbol{x})\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,\dots,m), \tag{3}$$

其中矩阵 $(S_{ij}(t,\boldsymbol{x}))$ 是对称负定的。若 S_{ij} 和 V 都不含时间 t，则式(3)给出文献[2]的梯度系统。按方程(式(3))求 $\dot{V}$，得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_i} S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \tag{4}$$

其中，右端第二项小于零。因此，若 V 正定，且 $\partial V/\partial t<0$，则解是稳定的；若 $\dot{V}$ 负定，则解是渐近稳定的。这个性质可用来研究可化成广义梯度系统(式(3))的非定常力学系统的解的稳定性。

2　方程的广义梯度表示

研究受有双面理想完整约束的力学系统，其位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\dots,n)$ 来确定。Nielsen 方程为

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s=1,2,\dots,n), \tag{5}$$

其中，$T=T(q_s,\dot{q}_s,t)$ 为系统的动能，$\dot{T}$ 为动能对时间的导数，$Q_s=Q_s(q_k,\dot{q}_k,t)$ 为广义力。设由方程可解出所有广义加速度，记为

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(q_k,\dot{q}_k,t) \quad (s,k=1,2,\dots,n), \tag{6}$$

令

$$a^s = q_s, \quad a^{n+s} = \dot{q}_s \quad (s=1,2,\dots,n), \tag{7}$$

则方程(6)可写成一阶形式:

$$\dot{a}^\mu = F_\mu(t,a^\nu) \quad (\mu,\nu=1,2,\dots,2n), \tag{8}$$

其中，

$$F_s = a^{n+s}, \quad F_{n+s} = \alpha_s 。 \tag{9}$$

如果系统还受有 g 个双面理想 Chetaev 型非完整约束:

$$f_\beta(t,q_s,\dot{q}_s) = 0 \quad (\beta=1,2,\dots,g), \tag{10}$$

那么运动微分方程有形式

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s=1,2,\dots,n), \tag{11}$$

其中 λ_β 为约束乘子。由方程(10)和(11)，可在运动微分方程积分之前求出 λ_β 为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数:

$$\lambda_\beta = \lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (\beta=1,2,\dots,g), \tag{12}$$

将其代入方程(11)，得

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s \quad (s=1,2,\cdots,n), \tag{13}$$

其中，

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} 。 \tag{14}$$

称方程(13)为与非完整系统(10)和(11)相应的完整系统的方程。若运动初始条件满足约束方程(10)，则相应完整系统(13)的解就给出非完整系统的运动。因此，只需研究方程(13)。由方程(13)可解出所有广义加速度，记为

$$\ddot{q}_s = \gamma_s(q_k,\dot{q}_k,t) \quad (s,k=1,2,\dots,n), \tag{15}$$

令

$$a^s = q_s, a^{n+s} = \dot{q}_s \quad (s=1,2,\dots,n), \tag{16}$$

则方程(15)可写成一阶形式：

$$\dot{a}^\mu = G_\mu(t,a^\nu) \quad (\mu,\nu=1,2,\dots,2n), \tag{17}$$

其中，

$$G_s = a^{n+s}, \quad G_{n+s} = \gamma_s 。 \tag{18}$$

一阶方程(8)或(17)一般还不能成为广义梯度系统(1)或(3)。对于方程(8)，若存在反对称矩阵 $(b_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{a}))$ 和函数 $V(t,\boldsymbol{a})$，使得

$$F_\mu = b_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu,\nu=1,2,\dots,2n), \tag{19}$$

则它可成为广义斜梯度系统(1)。若存在对称负定矩阵 $(S_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{a}))$ 和函数 $V(t,\boldsymbol{a})$，使得

$$F_\mu = S_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu,\nu=1,2,\dots,2n), \tag{20}$$

则它可成为广义梯度系统(3)。类似地，若有

$$G_\mu = b_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu,\nu=1,2,\dots,2n), \tag{21}$$

则方程(17)可成为广义斜梯度系统(1)。若有

$$G_\mu = S_{\mu\nu}\frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, ..., 2n), \tag{22}$$

则方程(17)可成为广义梯度系统(3)。

如果条件(19)~(22)不满足，可选其他一阶形式，例如，取

$$a^s = q_s, \quad a^{n+s} = A(t)q_s + B(t)\dot{q}_s, \tag{23}$$

其中 A 和 B 待定，以便化成广义梯度系统。

3　算例

例 1　单自由度系统的动能和广义力分别为

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{q}(2+\sin t) + q\cos t\right]^2,$$

$$Q = \left\{-q(2+\sin t)^3\left(1+\frac{1}{1+t}\right) + 3\dot{q}\cos t - q\sin t\right\}(2+\sin t),$$

其中各量已无量纲化，试建立 Nielsen 方程并研究零解的稳定性。

解　经计算，有

$$\dot{T} = [\dot{q}(2+\sin t) + q\cos t][\ddot{q}(2+\sin t) + 2\dot{q}\cos t - q\sin t],$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}} = 2[\dot{q}(2+\sin t) + q\cos t]\cos t + [\ddot{q}(2+\sin t) + 2\dot{q}\cos t - q\sin t](2+\sin t),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = [\dot{q}(2+\sin t) + q\cos t]\cos t,$$

Nielsen 方程

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}} - 2\frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

给出

$$\ddot{q} = -q(2+\sin t)^2\left(1+\frac{1}{1+t}\right) + \dot{q}\frac{\cos t}{2+\sin t}。$$

令

$$a^1 = q, \quad a^2 = \frac{\dot{q}}{2+\sin t},$$

则有

$$\dot{a}^1 = a^2(2+\sin t),$$

$$\dot{a}^2 = -a^1(2+\sin t)\left(1+\frac{1}{1+t}\right)。$$

它可写成形式

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2+\sin t\\ -(2+\sin t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix},$$

其中矩阵是反对称的，而

$$V = \frac{1}{2}(a^1)^2\left(1+\frac{1}{1+t}\right) + \frac{1}{2}(a^2)^2,$$

这是一个广义斜梯度系统。V 在 $a^1 = a^2 = 0$ 的邻域内正定，且有

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{2}(a^1)^2\frac{1}{(1+t)^2} < 0。$$

因此，零解 $a^1 = a^2 = 0$ 稳定。

例 2　单自由度系统的动能和广义力分别为

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{q}(1+t) + q\right]^2,$$

$$Q = 2\dot{q}(1+t) - (1+t)^2\{q(1+t)[(2+t)(2+\sin t) + \cos t] + \dot{q}[(1+t)(2+\sin t) + 2+t]\},$$

试建立 Nielsen 方程并研究零解的稳定性。

解　Nielsen 方程

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}} - 2\frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

给出

$$\ddot{q} = -q(1+t)[(2+t)(2+\sin t) + \cos t] - \dot{q}[(1+t)(2+\sin t) + 2+t]。$$

令

$$a^1 = q, \quad a^2 = \dot{q} + q(1+t)(2+\sin t),$$

则方程可写成一阶形式

$$\dot{a}^1 = -a^1(1+t)(2+\sin t) + a^2,$$

$$\dot{a}^2 = a^1(2+\sin t) - a^2(2+t)。$$

它可写成形式

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(1+t) & 1\\ 1 & -(2+t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix},$$

其中矩阵是对称负定的，函数 V 为

$$V = \frac{1}{2}(a^1)^2(2+\sin t) + \frac{1}{2}(a^2)^2,$$

这是一个广义梯度系统(3)。V 在 $a^1 = a^2 = 0$ 的邻域内正定，且 $\dot{V}$ 负定。因此，零解 $a^1 = a^2 = 0$ 是渐近稳定的。

例 3　系统的动能，广义力和非完整约束分别

为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),$$

$$Q_1=-\frac{15}{4}q_1(1+t)^2-5\dot{q}_1(1+t)+\frac{5\dot{q}_1}{4(1+t)},\quad Q_2=-\frac{1}{2}\dot{q}_1,$$

$$f=q_1+\dot{q}_1+2\dot{q}_2=0,$$

试建立 Nielsen 方程，并研究零解的稳定性。

解　Nielsen 方程(11)给出

$$\ddot{q}_1=-\frac{15}{4}q_1(1+t)^2-5\dot{q}_1(1+t)+\frac{5\dot{q}_1}{4(1+t)}+\lambda,$$

$$\ddot{q}_2=-\frac{1}{2}\dot{q}_1+2\lambda,$$

解得

$$\lambda=\frac{3}{4}q_1(1+t)^2+\dot{q}_1(1+t)-\frac{\dot{q}_1}{4(1+t)}\text{。}$$

将之代入第一个方程，得

$$\ddot{q}_1=-3q_1(1+t)^2-4\dot{q}_1(1+t)+\frac{\dot{q}_1}{1+t}\text{。}$$

令

$$a^1=q_1,\quad a^2=2q_1+\frac{\dot{q}_1}{1+t}\quad,$$

则有

$$\dot{a}^1=(1+t)(a^2-2a^1),$$
$$\dot{a}^2=-(1+t)(2a^2-a^1),$$

它可写成形式

$$\begin{pmatrix}\dot{a}^1\\ \dot{a}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(1+t) & 0\\ 0 & -(1+t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial a^1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial a^2}\end{pmatrix},$$

其中矩阵是对称负定的，函数V 为

$$V=(a^1)^2+(a^2)^2-a^1a^2\ ,$$

这是一个广义梯度系统(3)。V 在 $a^1=a^2=0$ 的邻域内正定，且$\dot{V}$ 负定。因此，零解 $a^1=a^2=0$ 是渐近稳定的。

4　结论

本文将非定常 Nielsen 方程，无论完整的，还是非完整的，在一定条件下化成广义梯度系统(1)或(3)，并使梯度系统中的函数V 成为 Lyapunov 函数，这样就可借助广义梯度系统的性质来研究这类力学系统的解的稳定性。

参考文献

[1] Nielsen J. Vorlesungen über Elementare Mechanik. Kopenhagen: Übersetzt und Bearbeitet Von Werner Fenchel, 1935

[2] 梅凤翔. 非完整力学系统的广义 Nielsen 方程. 力学与实践, 1980, 2(3): 61–62

[3] Mei F X. On the Nielsen’s operator and the Euler’s operator for nonholonomic systems // Proc of IUTAM-ISIMM symposium on modern developments in analytical mechanics. Torino, 1982: 627–634

[4] Mei F X, Capodanno P. Sur les équations du mouvement des systèmes non holonomes de masse variable. Rev Roum Sci Tech Méc Appl, 1983, 28(2): 123–137

[5] Liu Z F, Jin F S, Mei F X. Nielsen’s and Euler’s operators of higher order in analytical mechanics. Appl Math Mech, 1986, 7(1): 53–63

[6] 丁光涛. 高阶 Nielsen 方程. 科学通报, 1987, 32(12): 908–911

[7] 陈立群. 变质量可控力学系统中的 Nielsen 算子和 Euler 算子. 固体力学学报, 1989, 10(3): 275–278

[8] 陈滨. 分析动力学. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2012

[9] 梅凤翔. 分析力学(上卷). 北京: 北京理工大学出版社, 2013

[10] Hirsch M W, Smale S. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. New York: Springer-Verlag, 1974

[11] McLachlan R I, Quispel G R W, Robidoux N. Geometric integration using discrete gradients. Phil Trans R Soc Lond A, 1999, 357: 1021–1045

[12] Chen X W, Zhao G L, Mei F X. A fractional gradient representation of the Poincaré equations. Nonlinear Dyn, 2013, 73: 579–582

[13] 楼智美, 梅凤翔. 力学系统的二阶梯度表示. 物理学报, 2012, 61(2): 024502

[14] 梅凤翔, 吴惠彬. 广义 Birkhoff 系统的梯度表示. 动力学与控制学报, 2012, 10(4): 289–292

[15] 梅凤翔, 崔金超, 吴惠彬. Birkhoff 系统的梯度表示和分数维梯度表示. 北京理工大学学报, 2012, 32(12): 1298–1300