

平面几何图形检索的关键问题研究

符松平¹ 吕肖庆^{1,†} 刘璐¹ 冯天骁¹ 李国强¹ 汤帜^{1,2}

1. 北京大学计算机科学技术研究所, 北京 100080; 2. 数字出版技术国家重点实验室(北大方正集团有限公司), 北京 100871;
† 通信作者, E-mail: lvxiaoqing@pku.edu.cn

摘要 基于计算机辅助教学领域中平面几何图形的识别和检索研究, 提出一套可行的完整解决方案, 并对手绘图美化、基本图元检测、显著性分析、位置关系描述和匹配度计算等关键问题进行分析。在深入分析几何图各级特征的同时, 提出具有较强针对性的布局关系描述和复杂图形匹配的多种算法, 使得几何图形最终得以直接用于内容检索, 弥补了基于关键字检索技术在描述查询意图方面的不足。实验结果表明, 本文提出的解决方案不仅可行, 而且具有较高的准确度。

关键词 手绘图美化; 基本图元检测; 交叠图元显著性; 双图元结构描述子; 图形匹配; 图像检索; 平面几何图形

中图分类号 TP391

Study on Key Problems for Plane Geometric Diagram Retrieval

FU Songping¹, LÜ Xiaoping^{1,†}, LIU Lu¹, FENG Tianxiao¹, LI Keqiang¹, TANG Zhi^{1,2}

1. Institute of Computer Science & Technology, Peking University, Beijing 100080; 2. State Key Laboratory of Digital Publishing Technology (Peking University Founder Group), Beijing 100871; † Corresponding author, E-mail: lvxiaoqing@pku.edu.cn

Abstract Based on the study of retrieving plane geometric figures (PGFs) in the area of computer aided instruction, a feasible solution for PGF retrieval is proposed. The authors focus on several challenging tasks such as sketch beautification, geometric primitive detection, saliency analysis of the overlapped primitives, structural relationship description between two geometric primitives, and figure similarity computing. Several algorithms are presented especially on layout description and complex shape matching. The PGFs are applied directly to content retrieval and compensate for the weaknesses in describing the query intentions using keyword-based search. Experimental results demonstrate the feasibility and significant performance of the proposed retrieval algorithm.

Key words sketch beautification; geometric primitives detection; saliency analysis of the overlapped primitives; structural relationship description between two geometric primitives; shape matching; image retrieval; plane geometric figures

互联网的优越性使得计算机辅助教学迅速发展, 加快了内容数字化以及网络出版的进程。几何图形作为数学教学的重要组成部分, 不仅在数量上的急速增长, 在使用方法上也面临巨大的转变。

平面几何图形主要以数学题的形式存储在电子书或知识库中。传统上平面几何图形只能用主题信息或关键字检索, 很难准确地描述原始题目。显然, 几何图形本身可以更好地描述相应几何题的题目内

容, 所以检索几何题的最佳方法是直接利用原始几何图形或相应的手绘图进行检索而不是用关键字检索。

随着智能手机及平板电脑等多功能移动设备的普及, 用户可以通过触屏方式方便地实现手绘图。但目前, 互联网上大量的几何题资源却只能通过关键字检索, 基于图像或手绘的几何题检索系统已经成为一个迫切的应用需求。

国家自然科学基金(61472014, 61300061)资助

收稿日期: 2014-09-20; 修回日期: 2015-03-16; 网络出版日期: 2015-09-29

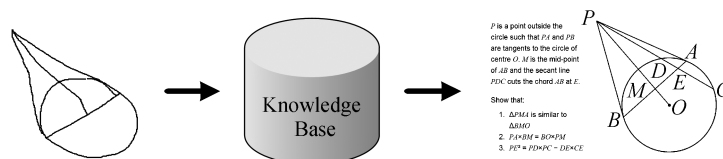


图 1 基于手绘的几何题检索系统

Fig. 1 Geometric question retrieval based on sketch

图 1 展示利用手绘图检索几何题的大致过程, 几何图结构的复杂性以及几何图形之间的相似性使得准确检索面临很大挑战。

1 相关工作

对几何信息的分析可以追溯到早期的几何教学, 如逻辑推理^[1]、数值分析^[2]、代数^[3]、基于图形的约束求解^[4]以及利用几何约束对手绘图进行美化^[5]等。

目前已经有一些基于手绘的检索系统, 例如 Cabri II Plus, Geometer's SketchPad 和 Geometry Expressions。在这些检索系统中, 用来美化图形的方法依赖于提前定义好的模板以限定几何约束。QuickDraw^[6]通过识别手绘图中的独立组成部分, 推断它们之间的几何约束, 从而实现图形美化。

几何约束也用于其他一些手绘识别系统^[7-10], 将手绘图的基本组成部分组合成具有高层语义信息的结构。Johnston 等^[11]通过对不同种类的几何约束指定置信度, 来平衡识别的速度和准确度。

虽然有关检索完整几何图形的研究不多, 但是在基本图元的检测方面(如三角形、矩形和圆的检测), 已经有一定的积累。

三角形检测的方法一般分为 4 种。1) 通过检测三条边来检测三角形, 霍夫变换是最广泛使用的直线检测方法。在文献[12-17]中, 霍夫变换被用来做三角形道路标志检测和识别。2) 文献[15,18-19]中提出的基于关键点检测的方法, 可以根据检测到的拐点定位三角形的顶点。3) 基于三角形几何特性的方法。比如基于角度^[15]、三角形回归方程^[20]、三角形内切圆的特性^[21]以及对称性^[22-24]。4) 其他一些利用颜色信息^[25]、AdaBoost^[26]以及神经网络^[27]的方法。

矩形检测的方法分为两类: 基于图元的方法和基于霍夫/拉东变换的方法。

基于图元的方法把一些短的碎线或弧结合起来

形成矩形的边, 利用这些预测出来的边, 根据特定的几何约束, 形成矩形或平行四边形。Lin 等^[28]研究了航拍图片中矩形/平行四边形检测的问题。首先检测直线并搜索相应的垂线, 然后利用每一条检测出来的直线和相应的垂线, 构成一个搜索的区域, 在此区域中寻找另外两条边。Lagunovsky 等^[29]提出一种基于线元的检测方法。首先提取线元, 然后根据这些提取出来的线元合成线段, 最后通过比较这些线段的长度和方向检测矩形。Tao 等^[30]提出一种基于图元, 从航空图片提取矩形建筑物的方法。首先执行边缘检测, 然后利用分割算法提取线性元素, 用平行线构造矩形。Liu 等^[31]将一种基于全局轮廓的线条检测方法和马尔可夫随机场相结合, 从彩色图像中提取矩形对象。

基于霍夫/拉东变换的方法首先通过霍夫/拉东变换检测直线, 利用这些检测出来的直线构造四边形。Zhu 等^[32]基于矩形霍夫变换, 检测在低温电子显微镜图像中的矩形颗粒。然而, 这种算法只能检测图像中同一尺度的矩形, 并且矩形的尺度必须是已知的。Jung 等^[33]提出一种利用加窗霍夫变换来检测灰度图像中矩形的方法, 但是这种方法的时间复杂度很高。Bhaskar 等^[34-35]过滤出霍夫/拉东变换中的峰值, 利用 4 个峰值的组合来检测一个潜在的矩形。Wu 等^[36]提出一种高分辨率图像中实时矩形检测的算法。Galamhos 等^[37]提出一种“穿越膨胀”的方法来提升霍夫变换的效果。

圆检测方法广泛运用于自然图像和文档图像^[38-40]。Chung 等^[38]提出一种多依据采样方法和修正策略来同时优化准确度和执行时间。Cuevas 等^[40]提出一种针对复杂噪音图像检测多个圆的方法。Lamiroy 等^[41]针对文档图像提出一种快速而且健壮的圆检测方法。

目前的大部分检测方法主要集中在检测单独的几何图元, 例如三角形、矩形或圆形等。然而, 对于平面几何图形, 基本图元之间很可能存在交叠现

象。在这些复杂的布局中,以上方法会遇到很多问题,甚至不能检测到基本图元。

2 关键问题

2.1 手绘图的美化

为了提高几何图分析的准确度,首先把用户输入的手绘图美化成标准图。最基本的平面几何图形主要由一些低层次的图元(如线、圆弧/圆等)组成,可通过以下方法对图形进行美化。

基于骨架和交点获取基本线段。根据经验阈值,去掉太短的线段。首先,从任意一个交点 P 出发,计算经过 P 点的所有线段的斜率,把具有相似斜率的线段合并;然后,转到下一个交点,重复以上操作。

当两条曲线相交时,交点附近的所有线段具有相似的斜率,很容易导致错误的线段连接。我们考虑一些其他信息来解决这个问题,比如每条线段法线方向的一致性。

手绘时,用户一般倾向于一笔只画一条线,但是在实际手绘过程中,本来想画直线的一笔很有可能不是直的,而且可能用户画了多笔来表示一条直线,这些问题在手绘应用系统中不可避免。因此我们需要对弯曲部分做特殊处理。考虑到人类手绘的习惯,我们把存在于两条线段之间的圆弧根据其斜率和曲率标准化为直线。通过这种方法,可以美化更多的直线。

2.2 基本几何图元的检测

由于组成几何题图形基本元素的种类是有限的,所以我们将一个几何题图分解为多个基本图形:圆形、圆弧、多边形、四边形、三角形和线段等,四边形中最有代表性的为矩形、平行四边形、梯形等。多边形中的正多边形也是几何题中常出现的基本图形。也就是说,对于给定的几何题图 G ,我们的目标是将其分解为多个基本图形 S_1, \dots, S_n ,再用 S_1, \dots, S_n 及其组合来表示 G 。这里的每个基本图形

S 可能是圆形、矩形、平行四边形、梯形、三角形、正多边形、线段等。

需要指出的是:平面几何图中的三角形、四边形等可能存在共点、共边或部分重叠的现象,因此检测出的基本图元不完全是理想分解结果的完美图元,而是包括了由于叠加、交叉而造成众多冗余甚至非标准的基本图元。根据以下步骤可将所有重叠的基本图形检测出来: 1) 集合 G 初始化为空; 2) 检测圆,将得到的结果加入集合 G ; 3) 利用 Hough 变换检测直线,然后从直线中寻找线段信息; 4) 利用对称性检测正多边形,并加入集合 G ; 5) 在已经检测到的直线中选取平行线,用对应的线段拼合成平行四边形、矩形和梯形并加入集合 G ; 6) 用已经检测到的线段拼合成三角形,并加入集合 G ; 7) 将未在 4~6 步中使用过的线段加入集合 G 。

上述步骤中,圆形检测和直线检测技术已经非常成熟,因此可利用现有算法,如 Zhu 等^[32]提出的基于随机采样的方法来进行圆的检测,尽管它是一种非确定性的方法,但对于几何题图形这类采样清晰的线段图而言,该方法仍然可以得到正确的结果。正方形、矩形、平行四边形以及梯形等四边形检测用文献[42]提出的方法完成检测。

2.3 显著性分析

2.3.1 图元显著性分析的必要性

使用所有检测到的几何图元来描述平面几何图形(plane geometric diagrams, PGDs)是一种低效的方法,很多 PGDs 包含冗余的图元,尤其是当它们出现交叠情况时。如图 2 所示的三角形包含 8 个关键点和 6 条边,可以组成 15 个基本三角形。对显著性不加分析,直接用所有的 15 个三角形来描述这个几何图,显然是低效的。根据一般的视觉感知,对图 2 而言,实际上只需要 3 个显著性图元就足以描述整个原始图形。实际上,不管是哪种类型的显著图元组合,总是存在很高的冗余,这也意味着寻找显著性图元十分必要。

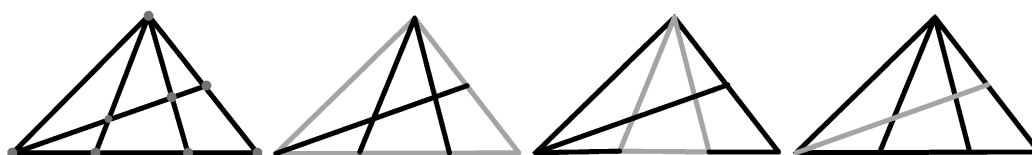


图 2 显著性图元检测
Fig. 2 Salient triangle detection

2.3.2 显著性分析方法

本质上,寻找一个符合视觉显著性的分解方案就是找一个 PGD 的最小产生集,这里的最小针对的是边覆盖的冗余度。这样每一个子问题都可以转化为一个集合覆盖问题,用显著性图元覆盖所有的线段。

我们参考格式塔原理来执行显著性图元的选择。以三角形为例,分析并得到一组优先规则。

1) 简洁性原则:用尽可能少的图元来组合原始图形。

2) 封闭性原则:包含凸面交点的三角形具有整体优先性。

3) 目标显著原则:大面积的三角形拥有更高优先级。

4) 连续性原则:长的线段比短的线段优先。因为共线的几条线段被认为应该组合在一起,而不是分离。

5) 自底向上原则:图形底层的三角形更倾向于被选择。

原始图可以根据以上规则得到一系列分解方案。分解方案中的显著性图元可以重构原始图形,并且具有很低的边覆盖冗余性。显著性图元分为两

种类型:凸面显著性图元(convex salient elements, CSEs)和内部显著性图元(interior salient elements, ISEs)。CSE 包含一个或多个存在于凸包上的支撑点,并且没有线从中穿过。ISE 含有内部的点。CSE 比 ISE 重要,因为 CSE 基本可以形成整个架构,ISE 一般只提供内部的细节信息,使图形更完整。显著性分析的结果并不唯一,通常由一组 CSE 和 ISE 共同组成,图 3 是针对同一图形的几种显著性分析结果,可以通过一个排序算法对分析结果进行筛选,用于后续的特征提取和匹配计算。

2.4 图元位置关系

通过显著性分析,我们可以选择一组显著图元 $G = \{S_1, \dots, S_n\}$ 来表示一个完整图形,其中 S_i 表示一个显著图元。这种表示忽略了图元之间的位置关系,而不同的图元布局往往会导致整个图形在属性上和视觉上产生明显的差异。为了更加细致地刻画复杂几何图形,我们需要对图元之间的位置关系提出准确的描述方法。

2.4.1 三角形与四边形的关系分析

以三角形与三角形之间的位置关系为例,设 S_1 和 S_2 均为三角形,令 a_1, a_2 和 a_3 是 S_1 的三条边, b_1, b_2 和 b_3 是 S_2 的 3 条边。我们用如下的 3×3 的矩阵

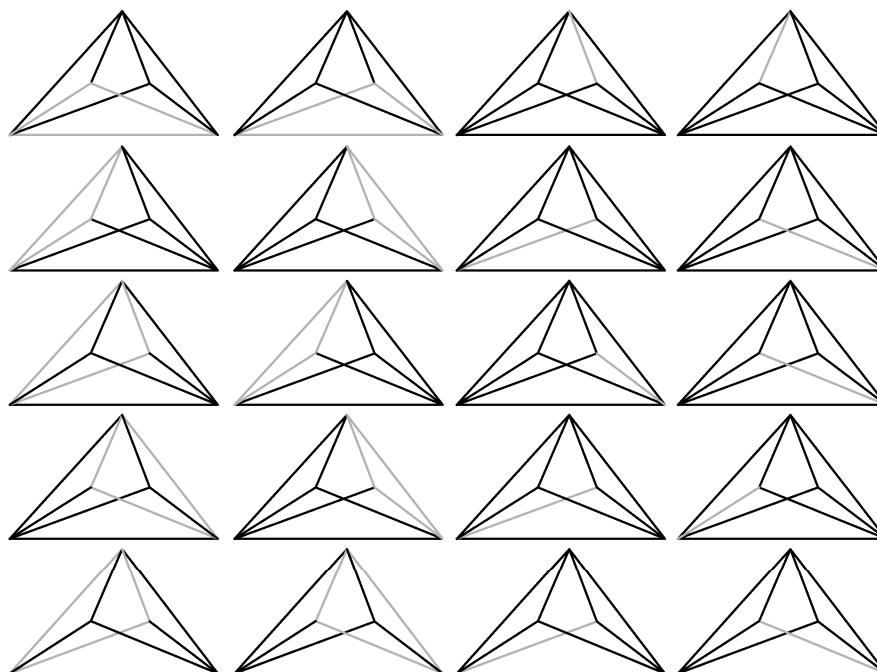


图 3 ISE 分解方案

Fig. 3 Results of decomposition of interior salient elements

来表示两个三角形之间的关系:

$$M_{33} = \begin{bmatrix} R_{ss}(a_1, b_1) & R_{ss}(a_1, b_2) & R_{ss}(a_1, b_3) \\ R_{ss}(a_2, b_1) & R_{ss}(a_2, b_2) & R_{ss}(a_2, b_3) \\ R_{ss}(a_3, b_1) & R_{ss}(a_3, b_2) & R_{ss}(a_3, b_3) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中, $R_{ss}(a_i, b_j)$ ($i, j=1, 2, 3$)表示线段与线段之间的关系, 所对应的物理结构及权重值如表 1 所示。

类似地, 对于四边形与四边形之间的关系, 以及四边形与三角形之间的关系, 可以用 4×4 的矩阵和 4×3 的矩阵分别表示。但是, 这些矩阵的缺点在于: 一方面结构比较复杂, 另一方面不具有对称性。例如在定义 S_1 的边时将 a_1 与 a_2 所对应的边互换, 就会形成另外一个矩阵, 新矩阵与原矩阵数值相同但位置不同。此外, 矩阵与矩阵之间的比较也很复杂。

我们只需要找出最强的线段关系, 就足以描述两个图元的关系, 这样就可以用三组或四组线段与线段的关系(数值)取代原来的矩阵。具体做法是, 对一个原始矩阵 M_{pq} ($p=3, 4; q=3, 4; p \geq q$), 逐次找出其最大值 A_k , 并从矩阵 M_{pq} 删除 A_k 所在行和所在列的全部元素, 重复此步骤直到找出所有最大值, 这样两个图元的关系就可以只用一个数组表示: $R(S_1, S_2)=[A_1, \dots, A_k]$ 。

2.4.2 双图元

为了降低计算复杂度以及更好地描述几何题图形内部各部分的位置关系, 我们需要将图形间关系中较“强”的关系挑选出来, 并定义为“双图形”, 不

够“强”的关系则不必考虑其位置关系, 描述时视为两个单独的基本图形。

以圆与圆之间的关系为例, 共有外切、内切、相交、内含和分离 5 种关系, 其中前 4 种关系可构成强关系, 而“分离”关系则不够强。其他各种图元之间的关系经过分析后, 可以筛选出如图 4 所示的 41 种双图元。

引入双图元后, 我们再对几何图进行分解时, 就尽量选择较大的双图元表示其组成。具体实现是通过图元的面积排序, 其中, 双图元的面积是其组成图元的面积之和。原始几何图由一个新的集合 $G=(P_1, \dots, P_n)$ 来表示, P 可以是一个基本图元, 也可以是一个双图元。

2.5 匹配度计算

本节引入相似度计算方法 $Match(G_1, G_2)$ 对图 $G_1\{P_1, \dots, P_m\}$ 和 $G_2\{Q_1, \dots, Q_n\}$ 的匹配度进行计算。为此, 首先定义 G_1 和 G_2 中各元素的匹配度, 由于它们可能是 G_1 或 G_2 中的基本图形, 也可能是双图元, 因此需要分情况进行讨论。

2.5.1 基本图形匹配

设 P 是 G_1 中的基本图形, 而 Q 是 G_2 中的基本图形。如果它们不是不同类型的基本图形, 那么其匹配度 $C(P, Q)$ 为 0, 即完全不匹配, 当两者存在一定的相似度时, 我们则根据视觉显著性的统计数据计算出匹配度的数值, 详见表 2。

为了体现基本图形 P 和 Q 之间的“圆”和“扁”的差异, 我们引入偏圆率指标:

表 1 线段与线段之间的关系
Table 1 Values of the relationships between two segments

线段与线段之间关系的种类		举例	$R_{ss}(a_i, b_j)$
完全重合		略	10
共线	有一个公共端点 P	P 不在中间	9
		P 在中间	8
	内含	7	
	没有公共端点	部分重叠	6
		相离	5
平行			4
不平行	相交	L-型相交	3
		T-型相交	2
		X-型相交	1
	不相交		0

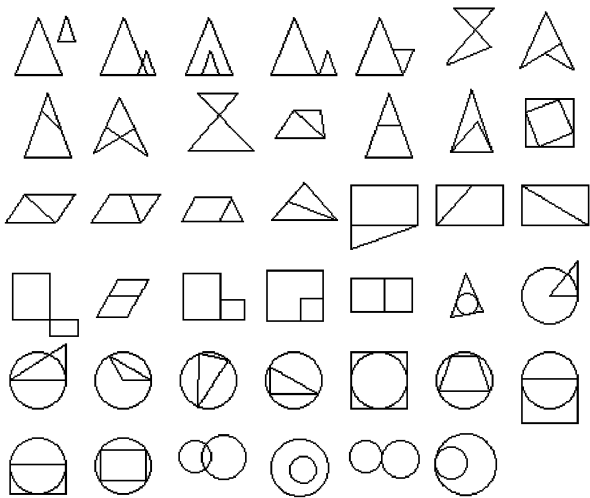


图 4 具有强关系的双图元
Fig. 4 List of all the compound elements

$$A(P, Q) = 1 - \left| (\text{PCR}(P) - \text{PCR}(Q)) \times 2\sqrt{\pi} \right|, \quad (2)$$

$$\text{PCR}(S) = \frac{\sqrt{\text{Area}(S)}}{\text{Perimeter}(S)}, S \in \{P, Q\}. \quad (3)$$

我们还引入大小差异指标以克服尺度变化, 如式(4)所示, 其中 $S(P)$ 为当前几何图中最大基本图元的面积:

$$S(P, Q) = \frac{\text{Area}(P) / \text{Area}(Q)}{\text{Scale}(P) / \text{Scale}(Q)}, \quad (4)$$

$$\text{当 } S(P, Q) > 1, S(P, Q) = \frac{1}{S(P, Q)},$$

其中 A 和 S 的取值范围都在 0 和 1 之间, 综合 3 项指标, 得出衡量 P 与 Q 的匹配程度的公式:

$$W(P, Q) = C(P, Q)A(P, Q)S(P, Q). \quad (5)$$

表 2 基本图形间类型匹配值
Table 2 Matching weight between basic shapes

P 的类型	Q 的类型	视觉显著比例/%	$C(P, Q)$
圆	圆	100	50
矩形或正方形	矩形或正方形	82	40
梯形	梯形	40	20
平行四边形	平行四边形	13	7
三角形	三角形	6.9	3
正多边形	正多边形	100	50*
不同类型的基本图形			0

注: *正多边形必须是边数相同的, 并且边数至少为 5。

2.5.2 匹配矩阵

对于图 $G_1\{P_1, \dots, P_m\}$ 和 $G_2\{Q_1, \dots, Q_n\}$, 可根据所有图元之间的匹配程度建立一个匹配矩阵:

$$M(G_1, G_2) = \begin{bmatrix} W(P_1, Q_1) & W(P_1, Q_2) & \cdots & W(P_1, Q_n) \\ W(P_2, Q_1) & W(P_2, Q_2) & \cdots & W(P_2, Q_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W(P_m, Q_1) & W(P_m, Q_2) & \cdots & W(P_m, Q_n) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

如果将上述矩阵看成一个完全二部图 $G=(G_1, G_2)=(P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n)$, 那么其最大权匹配就是我们要求的匹配矩阵 M 的最大的元素和。为此可以使用 KM (Kuhn-Munkres) 算法求得 G_1 和 G_2 最大权匹配:

$$\text{KM}(G_1, G_2) = \text{Kuhn_Munkres}(M(G_1, G_2)). \quad (7)$$

进一步归一化后的匹配得分如下:

$$\text{Match}(G_1, G_2) = \frac{2\text{KM}(G_1, G_2)}{\text{KM}(G_1, G_1) + \text{KM}(G_2, G_2)}. \quad (8)$$

3 实验

下面通过实验来检验上述图形描述和匹配方法的有效性。我们从 5 本典型中学几何课本中收集 270 个几何题图形来组建数据集, 所有的测试均在 Windows 操作系统上实现。

为了验证描述子的有效性, 还需要选择其他匹配方式作对照。我们构造了另外一个数据集, 其内容是对数据集中每一个几何题图形进行分解、标定后得到的基本图形集合(BSS) $G = \{S_1, \dots, S_n\}$ 。

我们采用图形识别方法中较典型的 Zernike 矩描述子方法以及基于 BSS 的“仅单图形”方法作为对比方法。图 5 为一个几何题图形在 3 种检索方法对比后的结果, 最左侧的图形为从数据库中选取的待检索图形, 第 2~6 列的图形从左往右依次是最接近检索结果的 5 个图形。可以看出, 方框内标出的图形从视觉上与左侧的待检索图形结构最相似。本文方法检索出 4 个相似的图形, 而“仅单图形”的方法检索出 2 个相似的图形, Zernike 方法返回的图形相似性很弱。从第 4 和 5 列可以看出, 在考虑了两个三角形之间关系的情况下, 更容易检索到与原图布局上更相似的几何题图形。

为了评估识别检索结果与人类认知的差异, 我们随机选取 16 个几何题图形, 并用 3 种方法进行

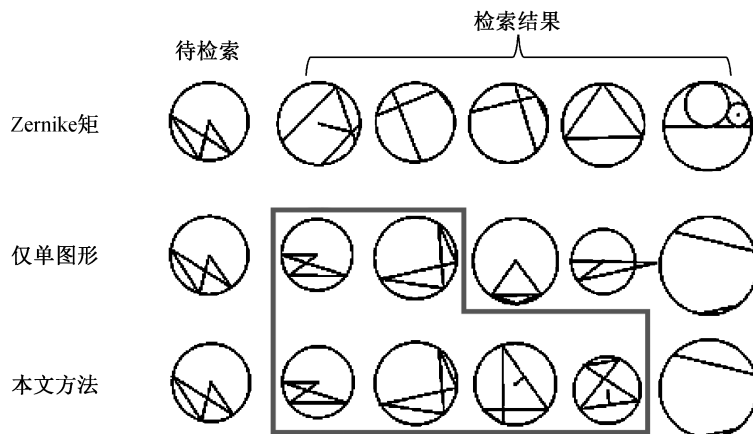


图 5 3 种方法的实验结果对比
Fig. 5 Experimental results for the three methods

表 3 三种方法的投票结果
Table 3 Votes for three methods

编号	Zernike 矩	仅单图形	本文方法	最佳	比例/%
1	0	5	20	本文方法	80
2	0	8	17	本文方法	68
3	1	7	17	本文方法	68
4	10	8	7	-	40
5	9	3	13	本文方法	52
6	13	12	0	Zernike	52
7	0	18	7	仅单图形	72
8	5	1	19	本文方法	76
9	8	14	3	仅单图形	56
10	0	8	17	本文方法	68
11	0	5	20	本文方法	80
12	0	0	25	本文方法	100
13	0	15	10	仅单图形	60
14	0	6	19	本文方法	76
15	0	3	22	本文方法	88
16	0	7	18	本文方法	72

说明: 阴影区域数字为最高票数。

检索, 对每次检索选取前 5 名的查询结果。然后邀请 25 个人对生成的结果进行投票, 3 种检索方法中本文方法表现最好。表 3 为原始投票结果, 即对于这 16 个查询来说, 认为相应方法为最佳方法的投票人数。表 3 中序号为查询原图的序号, “最佳”表示该查询图里获得投票最多的方法, “比例”代表该最佳方法获得的实际票数所占比例。第 4 号图形由于 3 种方法获得的投票数非常接近, 因此查询的

“最佳”栏空缺。

4 结论

本文对平面几何图形的识别和检索进行了系统分析, 并针对其中的关键问题: 1) 基本几何图元检测, 包括三角形、矩形、平行四边形、梯形和圆; 2) 交叠图元的显著性分析; 3) 基于双图元结构的描述子提取; 4) 复杂图形的匹配方法等, 提出一套可

行的解决方案。在检测到 PGD 所有基本图元后, 我们利用本文提出的优先规则分析图元显著性, 然后利用显著性图元简化图元子集。根据基本图元之间的空间关系构建 PGD 结构描述子, 本文提取的描述子可以比其他的基本图形描述子反映出更多的结构信息。最后利用矩阵匹配方法实现了完整的检索流程。据此搭建的原型系统可以运用到数学文档领域。未来会考虑更多种类的几何图元, 扩大我们的数据集, 并探索其商业用途。

参考文献

- [1] Aldefeld B. Variation of geometries based on a geometric-reasoning method. *Computer Aided Design*, 1988, 20(3): 117–126
- [2] Nelson, Juno G. A constraint-based graphics system. *Computer Graphics*, 1985, 19(3): 235–243
- [3] Kondo K. Algebraic method for manipulation of dimensional relationships in geometric models. *Computer-Aided Design*, 1992, 24(3): 141–147
- [4] Bouma W, Fudos I, Hoffmann C, et al. Geometric constraint solver. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(6): 487–501
- [5] Igarashi T, Matsuoka S, Tanaka H, et al. Interactive beautification: a technique for rapid geometric design // 10th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology (UIST). New York, 1997: 105–114
- [6] Cheema S, Gulwani S, LaViola J. Quick Draw: improving drawing experience for geometric diagrams // ACM Annual Conf on Human Factors in Computing Systems (CHI). Austin, 2012: 1037–1064
- [7] Wais P, Wolin A, Alvarado C. Designing a sketch recognition front-end: user perception of interface elements // 4th Eurographics workshop on Sketch-based interfaces and modeling (SBIM). New York, 2007: 99–106
- [8] Forbus K, Usher J, Lovett A, et al. Cogsketch: sketch understanding for cognitive science research and for education. *Topics in Cognitive Science*, 2011, 3(4): 648–666
- [9] Hammond T, Ladder R D. A sketching language for user interface developers. *Computers and Graphics*, 2005, 29(4): 518–532
- [10] LaViola J, Joseph J, Robert C Z. MathPad²: a system for the creation and exploration of mathematical sketches // ACM SIGGRAPH 2007 courses. New York, 2007: 432–440
- [11] Johnston J, Hammond T. Computing confidence values for geometric constraints for use in sketch recognition // Eurographics Symposium on Sketch-based Interfaces and Modeling (SBIM). Annecy, 2010: 71–78
- [12] He Jiangping, Ma Yan. Triangle detection based on windowed Hough Transform // Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR). Baoding, 2009: 95–100
- [13] García-Garrido M, Sotelo M, Martín-Gorostiza E. Fast road sign detection using Hough transform for assisted driving of road vehicles // Computer Aided Systems Theory—EUROCAST 2005. Las Palmas de Gran Canaria, 2005: 543–548
- [14] Schiekel C. A fast traffic sign recognition algorithm for gray value images // Computer Analysis of Images and Patterns. Ljubljana, 1999: 588–595
- [15] Piccioli G, de Michelib E, ParodiaP, et al. Robust method for road sign detection and recognition. *Image and Vision Computing*, 1996, 14(3): 209–223
- [16] Xue W, Sun X W. Multiple targets detection method based on binary Hough transform and adaptive time-frequency filtering. *Electromagnetics Research*, 2007, 74: 309–317
- [17] Kuo Wenjia, Lin Chungli. Two-stage road sign detection and recognition // IEEE International Conference on Multimedia and Expo. Beijing, 2007: 1427–1430
- [18] De la Escalera A, Moreno L E, Salichset M A, et al. Road traffic sign detection and classification. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1997, 44(6): 848–859
- [19] Croitoru A, Doytsher Y. Right-angle rooftop polygon extraction in regularised urban areas: cutting the Corners. *The Photogrammetric Record*, 2004, 19 (108): 311–341
- [20] Garlipp T, Muller C H. Detection of linear and circular shapes in image analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2006, 51(3): 1479–1490
- [21] Liu Hongmin, Wang Zhiheng. Detection of arbitrary triangle // 4th International Congress in Image and Signal Processing (CISP). Shanghai, 2011: 893–897
- [22] Wu Gang, Liu Weijie, Xie Xiaohui, et al. A shape detection method based on the radial symmetry nature

- and direction-discriminated voting // IEEE International Conference Image Processing (ICIP). San Antonio, 2007: 169–172
- [23] Loy G, Barnes N. Fast shape-based road sign detection for a driver assistance system. *Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2004, 1: 70–75
- [24] Loy G, Zelinsky A. Fast radial symmetry for detecting points of interest. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, 25(8): 959–973
- [25] Demirezen H, Baran M. Triangle detection with color information // *International Conference on Applied Electronics (AE)*. Pilsen, 2010: 1–4
- [26] Viola P, Jones M. *Robust real-time object detection [R]*. Cambridge: Compaq Cambridge Research Laboratory, 2001
- [27] Zhu Shuangdong, Zhang Yi, Lu Xiaofeng. Detection for triangle traffic sign based on neural network // *Advances in Neural Networks-ISNN*. Chengdu, 2006: 40–45
- [28] Lin Chungan, Nevatia R. Building detection and description from a single intensity image. *Computer Vision and Image Understanding*, 1998, 72(2): 101–121
- [29] Lagunovsky D, Ablameyko S. Straight-line-based primitive extraction in grey-scale object recognition. *Pattern Recognition Letters*, 1999, 20(10): 1005–1014
- [30] Tao Wenbing, Tian Jinwen, Liu Jian. A new approach to extract rectangle building from aerial urban images // *International Conference on Signal Processing*. Beijing, 2002: 143–146
- [31] Liu Yangxing, Ikenaga T, Goto S. An MRF model-based approach to the detection of rectangular shape objects in color images. *Signal Processing*, 2007, 87(11): 2649–2658
- [32] Zhu Yuanxin, Carragher B, Mouche F, et al. Automatic particle detection through efficient Hough transforms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2003, 22(9): 1053–1062
- [33] Jung C R, Schramm R. Rectangle detection based on a windowed Hough transform // *Proceedings of the 17th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*. Sao Luis, 2004: 113–120
- [34] Bhaskar H, Werghi N, Mansoori S A. Combined spatial and transform domain analysis for rectangle detection // *13th Conference on Information Fusion (FUSION)*. Edinburgh, 2010: 1–7
- [35] Bhaskar H, Werghi N. Comparing Hough and Radon transform based parallelogram detection // *GCC Conference and Exhibition (GCC)*. Dubai, 2011: 641–644
- [36] Wu Zhe, Kong Qingjie, Liu Jiapeng, et al. A rectangle detection method for real-time extraction of large panel edge // *2011 Sixth International Conference on Image and Graphics (ICIG)*. Hefei, 2011: 382–387
- [37] Galamhos C, Matas J, Kittler J. Progressive probabilistic Hough transform for line detection // *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Fort Collins, 1999: 554–560
- [38] Chung K L, Huang Y H, Shen S M, et al. Efficient sampling strategy and refinement strategy for randomized circle detection. *Pattern Recognition*, 2012, 45(1): 252–263
- [39] Akinlar C, Topal C. A real-time circle detector with a false detection control // *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Kyoto, 2012: 1309–1312
- [40] Cuevas E, Enciso V O, Wario F, et al. Automatic multiple circle detection based on artificial immune systems. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(1): 713–722
- [41] Lamiroy B, Gaucher O, Fritz L. Robust circle detection // *Proceedings of ninth International Conference on Document Analysis and Recognition*. Parana, 2007: 526–530
- [42] Li Keqiang, Lu Xiaoqing, Ling Haibin, et al. Detection of overlapped quadrangles in plane geometric figures // *12th International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR 2013)*. Washington DC, 2013: 260–264