北京大学学报(自然科学版) 第 52 卷 第 4 期 2016 年 7 月
Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis, Vol. 52, No. 4 (July 2016)
doi: 10.13209/j.0479-8023.2016.067

# 一类非自治广义 Birkhoff 系统的稳定性和分岔

曹秋鹏[1] 陈向炜[2,†]

1. 苏州科技大学数理学院，苏州 215009; 2. 商丘师范学院物理与电气信息学院，商丘 476000;
† 通信作者, E-mail: hnchenxw@163.com

**摘要** 研究一类非自治广义 Birkhoff 系统的分岔。将该系统转化为梯度系统，利用梯度系统的性质研究这一类系统平衡点的稳定性。研究表明，当系统含有某个参数时，系统平衡点的数目和稳定性将会随参数的变化而发生改变，从而产生分岔现象。

**关键词** 广义 Birkhoff 系统；梯度系统；分岔

**中图分类号** O316

# Stability and Bifurcation for a Type of Non-autonomous Generalized Birkhoffian Systems

CAO Qiupeng[1], CHEN Xiangwei[2,†]

1. School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009; 2. Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Normal University, Shangqiu 476000; † Corresponding author, E-mail: hnchenxw@163.com

**Abstract** Bifurcation for a type of non-autonomous generalized Birkhoffian systems is studied. Gradient representations for this type of non-autonomous generalized Birkhoffian systems are given. The stability of equilibrium point of these systems is discussed by the characteristic of the gradient system. Further the systems which contain some parameter are studied. The stability and the number of equilibrium point will change along with the change of the parameter to produce the bifurcation phenomenon.

**Key words** generalized Birkhoffian system; gradient system; bifurcation

1927 年，Birkhoff[1]在《Dynamical systems》(动力系统)一书中给出一类新型的积分变分原理和运动微分方程，Santilli[2]称之为 Pfaff-Birkhoff 原理和 Birkhoff 方程。Birkhoff 系统动力学是 Hamilton 力学的自然推广。近年来，对 Birkhoff 系统动力学的研究非常活跃，取得一些重要进展，主要集中在 Birkhoff 系统的积分理论[3]、逆问题[4]、稳定性[5]和对称性[6]等方面。1993 年，梅凤翔[7]研究了 Birkhoff 方程增加一个附加项的情形，称为广义 Birkhoff 方程。广义 Birkhoff 系统动力学也取得丰富的研究成果，同样集中在广义 Birkhoff 系统的逆问题[8]、积分理论[9]、对称性[10]、稳定性[11]等方面，但很少涉及系统分岔的问题。开展广义 Birkhoff 系统的分岔研究，可将非线性动力学相关理论推广应用到广义 Birkhoff 系统，探讨该系统的动力学行为，进一步完善 Birkhoff 系统的理论体系。因此，对广义 Birkhoff 系统分岔问题的研究有重要意义。

非线性动力学的分岔是动力系统的重要性质，是流体力学、电力学、非线性振动理论、控制理论、生态学等领域研究的重点内容[12–14]。2000 年，陈向炜等[15–16]首次研究 Birkhoff 系统的分岔问题，分析了二阶自治 Birkhoff 系统的极限点分岔、跨临界分岔以及叉形分岔。梅凤翔[17]研究了二阶自治广义 Birkhoff 系统平衡点分岔的相关问题，也讨论

国家自然科学基金(11372169)和苏州科技大学研究生科研创新计划(SKCX14_056)资助
收稿日期: 2015–10–08; 修回日期: 2016–02–05; 网络出版日期: 2016–07–14

了系统的极限点分岔、跨临界分岔以及叉形分岔。但是，这些研究仅针对自治 Birkhoff 系统，未涉及非自治情形。

梯度系统是一类重要的动力学系统[18]，在研究运动稳定性问题时具有很好的应用价值。一旦动力学系统能够转化成梯度系统，便可以借助梯度系统的性质研究动力学系统的稳定性。文献[19–23]研究了各类力学系统的梯度表示，利用梯度系统的性质分析了这些系统的平衡稳定性。Mei 等[24]利用梯度系统的性质，研究了自治广义 Birkhoff 系统的分岔。

在上述研究的基础上，本文利用梯度系统的性质，进一步研究含参数非自治广义 Birkhoff 系统的稳定性和分岔。研究表明，当系统所含的某个参数发生变化时，系统平衡点的数目和稳定性将会随参数的变化而发生改变，从而产生分岔现象。

## 1 广义 Birkhoff 系统

广义 Birkhoff 系统的运动微分方程[17]为

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\mu}=\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)$$

$$(\mu,\nu=1,2,\ldots,\ 2n),$$

可以写成如下形式:

$$\dot{a}^{\mu}=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)$$

$$(\mu,\nu=1,2,\ldots,2n), \tag{1}$$

其中,

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}} \tag{2}$$

为 Birkhoff 协变张量，$\Omega^{\mu\nu}$ 为 Birkhoff 逆变张量，它们之间有关系:

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho}=\delta^{\mu}_{\rho}$$

$$(\mu,\nu,\rho=1,2,\ldots,2n)\text{。} \tag{3}$$

对于方程(1)，$B=B(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数，$R_{\nu}=R_{\nu}(t,\boldsymbol{a})$ 为 Birkhoff 函数组，$\Lambda_{\nu}=\Lambda_{\nu}(t,\boldsymbol{a})$ 为附加项。当函数 $B, R_{\nu}, \Lambda_{\nu}$ 中都显含 $t$ 时，我们将系统(1)称为非自治广义 Birkhoff 系统。

## 2 梯度系统

梯度系统的微分方程有以下形式[17]:

$$\dot{x}_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$(i=1,2,\ldots,m)\text{。} \tag{4}$$

其中，$V=V(\boldsymbol{x})$称为势函数。

梯度系统有以下两个重要性质。

**性质 1** 对于系统(4)所有的 $\boldsymbol{x}$，都有 $\dot{V}\leqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 为系统的平衡点时，$\dot{V}=0$。

**性质 2** 对于系统(4)的线性化系统，在任意平衡点处其特征方程只有实根。

由 Lyapunov 一次近似理论可得如下命题。

**命题 1** 如果梯度系统(4)的一次近似特征方程的根皆为负数，则平衡位置是渐近稳定的；如果有正根，则平衡位置是不稳定的；如果存在单根 0 且无正根，则平衡位置是稳定的，但不是渐近稳定的；如果存在重根 0，则平衡位置是不稳定的。

## 3 系统的梯度表示

一般情况下，非自治广义 Birkhoff 系统(1)并不是梯度系统。如果系统(1)满足

$$\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left[\Omega^{\rho\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\right], \tag{5}$$

同时有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\right]=0$$

$$(\mu,\nu,\rho=1,2,\ldots,2n), \tag{6}$$

此时，方程(1)可以找到势函数 $V=V(\boldsymbol{a})$，使得

$$\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}-\Lambda_{\nu}\right)\right]=-\frac{\partial V}{\partial a^{\mu}}, \tag{7}$$

这样，非自治广义 Birkhoff 系统(1)便成为一个梯度系统。于是，我们利用梯度系统的性质研究该系统的分岔。

## 4　系统平衡点的静态分岔

假设非自治广义 Birkhoff 系统(1)的 Birkhoff 函数 $B$, Birkhoff 函数组 $R_\nu$ 或附加项 $\Lambda_\nu$ 含有某一个常参数 $\mu$，则可以将非自治广义 Birkhoff 系统(1)写成如下形式:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \mu), \tag{8}$$

其中,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \mu) = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu\right)$$
$$(\mu,\ \nu = 1, 2, \ldots, 2n),$$

且等式右端满足式(6)。

设 $(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)$ 是方程

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \mu) = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

的解。本文研究的内容是: 1) 随着参数 $\mu$ 的变化, 点 $(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)$ 对应的方程(8)的平衡点稳定性变化情况; 2) 随着参数 $\mu$ 的变化，在点 $(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)$ 附近，方程(9)的解对应的方程(8)的平衡点个数变化情况。

当 $\mu$ 固定时，方程(9)在 $(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)$ 的足够小邻域内解的个数记为 $m$。当 $\mu$ 发生变化经过 $\mu_0$ 时，$m$ 发生改变或者点 $(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)$ 对应的方程(8)的平衡点稳定性发生改变，则称 $(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)$ 是一个静态分岔点，$\mu_0$ 称为分岔值。

对于研究内容 1, 若非自治广义 Birkhoff 系统(8)能够成为一个梯度系统，那么平衡点的稳定性由命题 1 判定，随着参数 $\mu$ 的变化，梯度系统的一次近似特征方程的根的正负性可能发生变化。

对于研究内容 2, 当 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\ \mu)=\boldsymbol{0}$ 的解是一些曲线时，分岔点 $(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)$ 是某两条解曲线的交点。下面给出系统(8)发生研究内容 2 情况的一个必要条件。

**定理 1**　对于系统(8)，设点$(\boldsymbol{a}_0,\ \mu_0)$处有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)=0$，在$(\boldsymbol{a}_0,\ \mu_0)$的邻域内 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\ \mu)$对 $\boldsymbol{a}$ 可微，且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \mu)$和 $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \mu)$对 $\boldsymbol{a}$, $\mu$ 连续。假如$(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)$是 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \mu)=0$ 的一个分岔点，则$|\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}_0,\ \mu_0)|=0$。其中 $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \mu)$表示 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \mu)$关于 $\boldsymbol{a}$ 的 Jacobian 矩阵。

证明: 假设$|\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}_0, \mu_0)|\neq 0$，那么由隐函数定理，可以得到当$|\mu-\mu_0|\ll 1$ 时，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\ \mu)=0$ 唯一地确定了一条解曲线 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\mu)$，使得 $\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{a}(\mu_0)$。此时，$(\boldsymbol{a},\ \mu_0)$不能成为分岔点与$(\boldsymbol{a}_0,\ \mu_0)$ 是分岔点矛盾。定理 1 得证。

下面利用两个算例，分别从系统(8)的平衡点稳定性的变化和平衡点个数的变化，说明系统(8)的静态分岔。

## 5　算例

**例 1**　非自治广义 Birkhoff 系统:

$$B = \mu a^1 a^2 \sin t\,,\ \ R_1 = 0\,,\ \ R_2 = a^1 \sin t\,,$$
$$\Lambda_1 = \mu a^2 \sin t + a^1 \sin t + a^2 \sin t + (a^2)^3 \sin t\,,$$
$$\Lambda_2 = a^1 \cos t - a^2 \sin t\,,$$

其中 $\mu$ 是参数。

下面，试写出该系统的运动微分方程，并分析 $\mu$ 对系统平衡位置稳定性的影响。

由方程(8)，得到系统的微分方程:

$$\begin{cases}\dot{a}^1 = -\mu a^1 - a^2, \\ \dot{a}^2 = -a^1 - a^2 - (a^2)^3,\end{cases} \tag{10}$$

显然这是一个梯度系统。此时系统的一次近似特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda+\mu & 1 \\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix} = \lambda^2 + (\mu+1)\lambda + \mu - 1 = 0\ 。 \tag{11}$$

当 $\mu > 1$ 时，方程(11)有两个负实根，此时平衡位置是渐近稳定的；当 $\mu = 1$ 时，方程(11)有一个根是 0, 一个根是$-2$，此时平衡位置是稳定的；当 $\mu < 1$ 时，方程(11)两个根一正一负，此时平衡位置是不稳定的。因此，当 $\mu = 1$ 时，系统发生分岔，$\mu = 1$ 是系统的分岔值。

**例 2**　非自治广义 Birkhoff 系统:

$$R_1 = a^2 e^t\,,\ \ R_2 = 0\,,\ \ B = a^1 a^2 e^t\,,$$
$$\Lambda_1 = a^2 e^t\,,\ \ \Lambda_2 = e^t a^1 + a^1(a^1-\mu)(2a^1-\mu)e^t\,,$$

其中 $\mu$ 是参数。

下面，试写出该系统的运动微分方程，并分析 $\mu$ 对系统平衡位置稳定性的影响。

由方程(8)得到系统的微分方程:

$$\begin{cases}\dot{a}^1 = -a^1(a^1-\mu)(2a^1-\mu), \\ \dot{a}^2 = -a^2。\end{cases} \tag{12}$$

显然，方程(12)满足式(5)和(6)，是一个梯度系统。系统(12)的平衡点个数与参数 $\mu$ 的取值有关。

对于任意的 $\mu$, $(\boldsymbol{0}, \mu)$总是方程(12)的解，且

$$\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0},\mu)=\begin{pmatrix}-\mu^2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$|\mathrm{D}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{0},0)|=0\text{。}$$

由定理 1 可知，点 $(\boldsymbol{0},0)$ 可能成为系统(12)的分岔点。下面具体分析分岔情况。

当 $\mu=0$ 时，方程(12)有一个平衡点(0, 0)，方程(12)在(0, 0)点处的一次近似特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)=0,\tag{13}$$

此方程有根 $\lambda=0$ 和 $\lambda=-1$，由命题 1 可知此时平衡点是稳定的，但不是渐近稳定的。

当 $\mu\neq 0$ 时，方程(12)有 3 个平衡点，分别为点(0, 0), $(\mu, 0)$和 $\left(\dfrac{\mu}{2},0\right)$。

1) 平衡点 $(0,0)$ 处的一次近似特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda+\mu^2 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+\mu^2)(\lambda+1)=0,\tag{14}$$

此方程有根 $\lambda=-\mu^2$ 和 $\lambda=-1$，由命题 1 可知此平衡点是渐近稳定的。

2) 我们对平衡点$(\mu, 0)$做如下处理：令

$$a^1=\mu+\zeta^1,\quad a^2=\zeta^2,$$

则方程(12)变成

$$\begin{cases}\dot{\zeta}^1=-(\zeta^1+\mu)\,\zeta^1(2\zeta^1+\mu),\\ \dot{\zeta}^2=-\zeta^2,\end{cases}\tag{15}$$

此时平衡点 $(\mu,0)$ 成为 $(\zeta^1,\zeta^2)=(0,0)$。方程(15)在 $(\zeta^1,\zeta^2)=(0,0)$ 处的一次近似特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda+\mu^2 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+\mu^2)(\lambda+1)=0,\tag{16}$$

同样，此平衡点是渐近稳定的。

3) 我们对平衡点 $\left(\dfrac{\mu}{2},0\right)$ 做如下处理：令

$$a^1=\frac{\mu}{2}+\zeta^1,$$

$$a^2=\zeta^2,$$

那么方程(12)变成

$$\begin{cases}\dot{\zeta}^1=-2\left(\dfrac{\mu}{2}+\zeta^1\right)\left(\zeta^1-\dfrac{\mu}{2}\right)\zeta^1,\\ \dot{\zeta}^2=-\zeta^2,\end{cases}\tag{17}$$

此时平衡点 $\left(\dfrac{\mu}{2},0\right)$ 成为 $(\zeta^1,\zeta^2)=(0,0)$。方程(17)在 $(\zeta^1,\zeta^2)=(0,0)$ 处的一次近似特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-\dfrac{\mu^2}{2} & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=\left(\lambda-\frac{\mu^2}{2}\right)(\lambda+1)=0,\tag{18}$$

方程(18)有根 $\lambda=\dfrac{\mu^2}{2}$ 和 $\lambda=-1$。由命题 1 可知此平衡点是不稳定的。

我们发现，含有参数 $\mu$ 的系统(12)，当 $\mu=0$ 时，平衡点只有 1 个，当 $\mu\neq 0$ 时，平衡点有 3 个，平衡点的个数发生了改变，并且对于同一平衡点(0, 0)，两种情况下其稳定性并不相同。因此，(0, 0)成为系统(12)的分岔点，$\mu=0$ 是该系统的分岔值。

## 6 结论

本文把利用梯度系统研究稳定性的方法推广应用到一类非自治广义 Birkhoff 系统，该系统在满足条件(5)和(6)情况下就可转化为一个梯度系统，于是可以利用梯度系统的性质研究这类非自治广义 Birkhoff 系统的稳定性和分岔。本文的例子说明，随着参数的变化，系统平衡位置的稳定性以及平衡点的个数会随之变化，系统发生分岔。当然，这里的分岔指系统平衡点处的静态分岔。

### 参考文献


[1] Birkhoff G D. Dynamical systems. Providence: AMS College Publisher, 1927

[2] Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅰ. New York: Springer, 1978

[3] Zhang Hongbin, Chen Liqun, Gu Shulong, et al. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems. Chinese Physics B, 2007, 16(3): 582–587

[4] 张永发，梅凤翔．Birkhoff 系统动力学逆问题的两种提法和解法．北京理工大学学报，1996, 16(4): 352–356

[5] 傅景礼，陈立群，薛纭，等．相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性．物理学报, 2002, 51(12): 2683–2689

[6] 张毅．相对论性力学系统的 Birkhoff 对称性与守恒

量. 物理学报, 2012, 61(21): 214501

[7] 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Noether 理论. 中国科学: A 辑, 1993, 23(7): 709–717

[8] 梅凤翔, 解加芳, 江铁强. 广义 Birkhoff 系统动力学的一类逆问题. 物理学报, 2008, 57(8): 4649–4651

[9] 葛伟宽, 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统的时间积分定理. 物理学报, 2009, 58(2): 699–702

[10] Li Yanmin. Lie symmetries, perturbation to symmetries and adiabatic invariants of a generalized Birkhoff system. Chinese Physics Letters, 2010, 27(1): 010202

[11] 张毅. 自治广义 Birkhoff 系统的平衡稳定性. 物理学报, 2010, 59(1): 20–24

[12] Wen Dengzhe, Chen Yushu. Bifurcation analysis of fan casing under rotating air flow excitation. Applied Mathematics and Mechanics, 2014, 35(9): 1099–1114

[13] Ma Meiling, Min Fuhong. Bifurcation behavior and coexisting motions in a time-delayed power system. Chinese Physics B, 2015, 24(3): 030501

[14] Stiefs D, Gross T, Steuer R, et al. Computation and visualization of bifurcation surfaces. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2008, 18(8): 2191–2206

[15] Chen Xiangwei, Mei Fengxiang. Existence of periodic solutions for higher order autonomous Birkhoff systems. Journal of Beijing Institute of Technology, 2000, 9(2): 125–130

[16] 陈向炜, 罗绍凯, 梅凤翔. 二阶自治 Birkhoff 系统的平衡点分岔. 固体力学学报, 2000, 21(3): 251–255

[17] 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学. 北京: 北京理工大学出版社, 2013

[18] Hirsch M W, Smale S, Devaney R L. Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos. Singapore: Elsevier, 2008

[19] 梅凤翔. 关于梯度系统. 力学与实践, 2012, 34(1): 89–90

[20] 梅凤翔, 吴惠彬. 一阶 Lagrange 系统的梯度表示. 物理学报, 2013, 62(21): 214501

[21] 陈向炜, 李彦敏, 梅凤翔. 双参数对广义 Hamilton 系统稳定性的影响. 应用数学和力学, 2014, 35(12): 1392–1397

[22] 曹秋鹏, 张毅, 陈向炜. 约束自治广义 Birkhoff 系统平衡稳定性的梯度系统方法. 云南大学学报: 自然科学版, 2015, 37(2): 228–232

[23] 梅凤翔, 吴惠彬. 广义 Birkhoff 系统的梯度表示. 动力学与控制学报, 2012, 10(4): 289–292

[24] Mei Fengxiang, Wu Huibin. Bifurcation for the generalized Birkhoffian system. Chinese Physics B, 2015, 24(5): 054501